FAKULTA
ELEKTROTECHNICKÁ
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

2013

Pracoviště: Regionální inovační centrum elektrotechniky
Fakulta elektrotechnická

Výzkumná zpráva č.: 22160-004-2013

Metoda návrhu parametrů regulátoru pomocí tvarování Nyquistovy křivky a pomocí umístění pólů

Druh úkolu: Vědecko-výzkumný

Řešitelé: Ing. Vendula Mužíková

Vedoucí úkolu: prof. Ing. Zdeněk Peroutka, Ph.D.

Počet stran: 27

Datum: říjen 2013

Revize: 1

Tato práce vznikla s podporou Evropského fondu pro regionální rozvoj a Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR v rámci projektu Regionální inovační centrum elektrotechniky (RICE), číslo projektu CZ.1.05/2.1.00/03.0094 a s podporou projektu SGS-2012-071.

Anotace

Cílem této výzkumné zprávy je představení dvou metod: ladění PI regulátoru pomocí tvarování Nyquistovy křivky a umístění pólů pomocí stavové zpětné vazby. Nejprve je teoreticky popsána metoda ladění PI regulátoru pomocí tvarování Nyquistovy křivky. Dále bude představen použitý algoritmus na příkladu v simulačním nástroji Matlab.

V druhé části práce bude představena metoda umístění pólů přiřazením vhodné Jordanovy formy. Bude proveden teoretický popis metody a dále budou uvedeny příklady použití metody v Matlab.

Seznam symbolů a zkratek

PI	Proporcionálně-integrační regulátor
ZV	Zpětná vazba
$S(s)$	Citlivostní funkce
$T(s)$	Komplementární citlivostní funkce
k	Proporcionální zesílení
k_i	Integrační zesílení
x	stav systému
u	vstup
y	výstup
J	moment setrvačnosti rotoru
b	konstanta viskózního tření
Ke	konstanta elektromotorické síly
Kt	konstanta momentu motoru
R	elektrický odpor
L	indukčnost
A	matice systému
B	matice řízení
C	matice vazeb výstupu na stav
D	vazeb vstupu na výstup

Obsah

1 Metoda tvarování Nyquistovy křivky

1.1 Úvod

PID regulátor dnes představuje standardní a osvědčené řešení použitelné pro převážnou většinu průmyslových regulací. Nelze však říci, že existuje nějaká standardní a všeobecně přijatá metoda návrhnu PID regulátoru na základě známého modelu řízené soustavy. Je známo, že splnění standardních návrhových požadavků na regulační smyčku (např. bezpečnost v zesílení a ve fázi) lze dosáhnout vhodným tvarováním Nyquistovy křivky.

V této zprávě bude ukázán návrh parametrů PI regulátoru metodou robustních regionů, tj. tvarováním Nyquistovy křivky. Algoritmus návrhu PI regulátoru byl vypracován v programu Matlab. Výsledek byl ověřen pomocí jednoduchého a snadno dostupného internetového nástroje pro návrh PID regulátoru, který je možné nalézt na PIDlab.com. PI regulátor byl použit pro systém druhého řádu s dopravním zpožděním.

1.2 Princip metody tvarování Nyquistovy křivky

Je známo, že požadovaných vlastností uzavřené smyčky (robustnosti ve stabilitě, přesnosti a kvality regulace) lze dosáhnout vhodným tvarováním (kompenzací) frekvenční charakteristiky otevřené smyčky. Grafická podoba frekvenční charakteristiky v komplexní rovině je nazývána Nyquistova křivka. Vhodným tvarováním Nyquistovy křivky je možné nalézt vhodné parametry PI regulátoru. Tato úloha se nazývá tvarování frekvenční charakteristiky neboli loop shaping.

V následujících rovnicích jsou nejprve popsány rovnice pro citlivostní funkci $S(s)$ a komplementární citlivostní funkci $T(s)$. Dále je zde uvedena omezující podmínka návrhu regulátoru (součet obou těchto funkcí je 1).

$$\begin{gathered}
U(s) = C(s)E(s) \\
E(s) = W(s) - Y(s) \\
Y(s) = P(s)C(s)W(s) - P(s)C(s)Y(s) \\
T(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} \\
\\
S(s) = \frac{1}{1+P(s)C(s)} = \frac{1}{1+L(s)} \\
\|S(jw)\| \leq \epsilon_s \\
\left\|\frac{1}{1+L(jw)}\right\| \leq \epsilon_s \\
\|1 + L(jw)\| \leq \frac{1}{\epsilon_s} \\
S(s) + T(s) = 1
\end{gathered} \tag{1}$$

Pro nalezení vhodných parametrů PI regulátoru je nutné nejdříve vhodně zvolit tzv. tvarovací bod. Tvarovací bod je zvolen v komplexní rovině v závislosti na požadované bezpečnosti ve fázi a bezpečnosti v amplitudě.

Nejprve požadujeme, aby Nyquistova křivka $L(jw)$ pro frekvenci w procházela bodem $X = u + jv$ komplexní roviny (tvarovací bod). Naším úkolem je nalézt všechny páry k a ki PI regulátoru, pro které platí $L(jw) = X$.

$$
\begin{gathered}
(a+jb)(k-j\tfrac{k_i}{w}) \\
\left[ak+b\tfrac{k_i}{w}\right]+j\left[bk-a\tfrac{k_i}{w}\right]=u+jv \\
u=ak+b\tfrac{k_i}{w} \\
v=bk-a\tfrac{k_i}{w} \\
\begin{bmatrix} a & \frac{b}{w} \\ b & -\frac{a}{w} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ k_i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\
det\begin{bmatrix} a & \frac{b}{w} \\ b & -\frac{a}{w} \end{bmatrix}=-\tfrac{1}{w}(a^2+b^2) \\
k=\tfrac{au+bv}{a^2+b^2} \\
k_i=\tfrac{[av-bu](-w)}{a^2+b^2}
\end{gathered} \tag{2}
$$

Výrazy pro parametry PI regulátoru k a ki definují parametrickou křivku s parametrem w v rovině parametrů regulátorů ki, k. Tato křivka spolu s osami K_i, K rozděluje parametrickou rovinu na několik oblastí (regionů). Je zřejmé, že hranice oblastí odpovídají takovým parametrům PI regulátoru, kdy Nyquistova křivka prochází bodem X. Všechny body uvnitř libovolného regionu mají tu vlastnost, že bod X leží na téže straně odpovídající Nyquistovy křivky. Požadovaná relativní poloha bodu a Nyquistovy křivky je obvykle splněna pouze v jediném regionu. Ten potom obsahuje všechny parametry PI regulátoru, které splňují tvarovací požadavek [1].

Analogicky lze postupovat i v případě požadavku na omezení citlivostní funkce $L(jw)$ nebo na omezení komplementární citlivostní funkce $T(jw)$:

$$
\begin{gathered}
S(jw)=\tfrac{1}{1+P(jw)C(jw)}=\tfrac{1}{1+L(jw)} \\
sup\,\|S(jw)\|\leq M_S \\
T(jw)=\tfrac{L(jw)}{1+L(jw)} \\
sup\,\|T(jw)\|\leq M_T
\end{gathered} \tag{3}
$$

kde $M_S \text{a} M_T$ jsou návrhové parametry (omezení kladená na průběh frekvenční charakteristiky).

Lze snadno ověřit, že platí $S(s)+T(s)=1$, což je jedno ze základních omezení při návrhu zpětnovazebního regulačního obvodu. Nelze například navrhnout regulátor, který by současně zajistil obvod necitlivý vůči poruše a vůči referenčnímu signálu. V praxi je tedy nutné volit priority pro jednotlivé frekvenční rozsahy.

Podmínka robustní stability býva pro účely návrhu regulátoru s poměrnou malou chybou aproximována tzv. smíšenou citlivostí (mixed sensitivity):

$$\left\| \begin{matrix} W_p(s)S_0(s) \\ W_M(s)T_0(s) \end{matrix} \right\|_\infty \leq 1 \tag{4}$$

Při klasickému loop shapingu tvarujeme velikost frekvenční charakteristiky otevřené smyčky $L(jw) = Q(jw)G(jw)$. Do tohoto procesu zpravidla není zahrnuta žádná optimalizace, ale pouze jistá základní pravidla a naše zkušenosti, přičemž cílem je získat $\|L(j\omega)\|$tak, aby měla požadovanou šířku přenášeného pásma, nepřekročila rezonanční převýšení, atd.

Návrh je přímočarý a transparentní, na druhou stranu, ale tento postup nebere přímo v úvahu přenosy uzavřené smyčky. Proto se využívá také možnosti tvarování přímo funkcí $S(s)$, $T(s)$.

Citlivostní funkce S je velmi dobrým ukazatelem chování uzavřené smyčky. V ideálním případě požadujeme, aby S bylo malé a proto nám stačí zabývat se pouze amplitudou citlivostní funkce. Typicky je S malé na nízkých frekvencích, ale z důvodu strikní ryzosti reálných systémů se na vysokých frekvencích dostává až k 1.

1.3 Příklad

Za účelem ověření správnosti popsaného postupu byla metoda použita na příkladu systému druhého řádu s dopravním spožděním. Systém je popsán přenosem:

$$\frac{\exp(-100 \cdot s)}{400 \cdot s^2 + 50 \cdot s + 1} \tag{5}$$

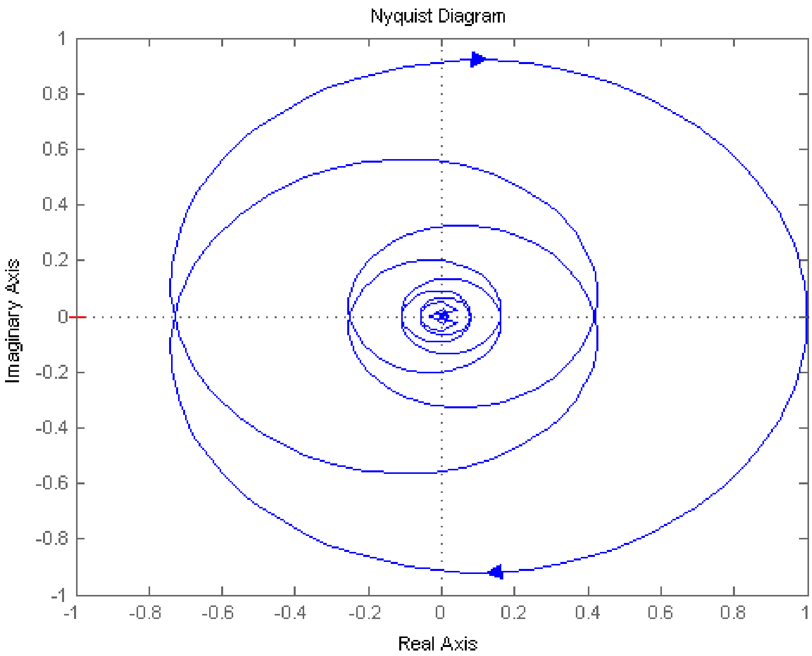
Pro správný návrh parametrů PI regulátoru byl dán požadavek na minimální bezpečnost v zesílení $2\,(B_Z \geq 2)$ a minimální bezpečnost ve fázi $60\,\deg\,(B_F \geq 60\,\deg)$, který je ekvivalentem požadavku, aby body $X_1 = -0,5$ a $X_2 = -0,5(1 + j\sqrt{3})$ ležely nalevo od křivky $L(jw)$ (postupujeme-li po ní ve směru rostoucí frekvence) nebo aby ležely přímo na této křivce.

Připouštíme pouze kladné hodnoty parametrů k a ki, jsou zajímavé jen regiony v prvním kvadrantu. Hranice regionů odpovídají parametrům PI regulátoru, které vedou na Nyquistovy křivky procházející body $X_1 a\, X_2$.

Ze všech možných řešení je vhodné vybrat ten bod, který má největší souřadnici ki. Je tomu tak proto, že příslušný PI regulátor má největší zesílení na nízkých frekvencích a dosahuje nejmenší hodnoty kritéria:

$$I_E = \int e(t)dt \tag{6}$$

při skokové poruše na vstupu řízené soustavy [2].



Obr. 1: Nyquistova křivka daného systému

1.4 Simulace v programu Matlab a ověření výsledků v PIDlab

V následujícím odstavci je představena simulace příkladu uvedeného výše. Simulace je provedena v programu Matlab. Její výsledky jsou ověřeny s programem PIDlab, volně dostupným na internetu [3]. Pro simulaci v Matlab a následné ověření v PIDlab byl použit stejný systém jako v předchozím odstavci, a tedy systém druhého řádu s dopravním spožděním popsaný:

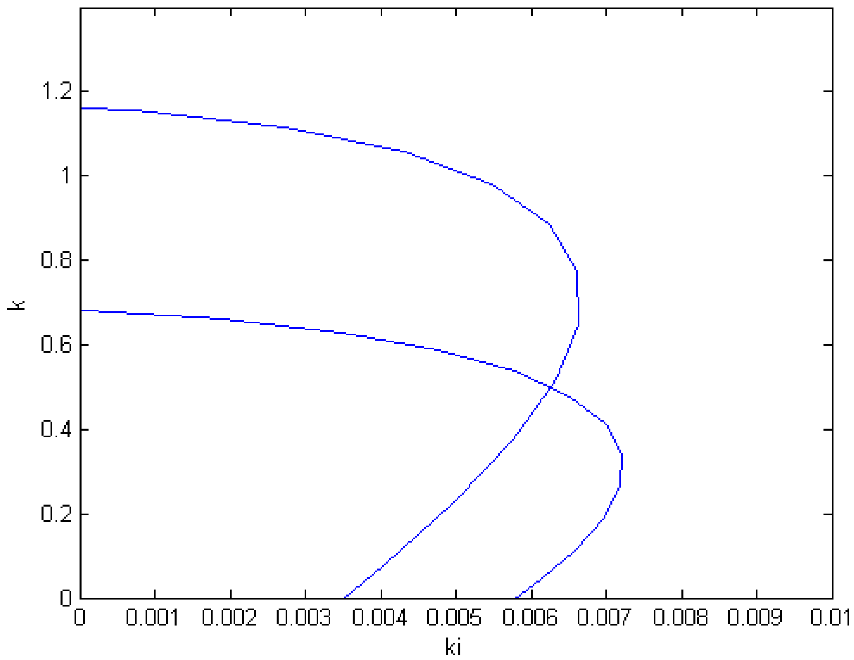
$$\frac{\exp(-100 \cdot s)}{400 \cdot s^2 + 50 \cdot s + 1} \tag{7}$$

Na obr.1 je možné vidět Nyquistovu křivku daného systému. Na obr. 2 jsou vykresleny dané parametry PI regulátoru pro daný systém a danou bezpečnost ve amplitudě a ve fázi. Parametry jsou vykresleny v programu Matlab.

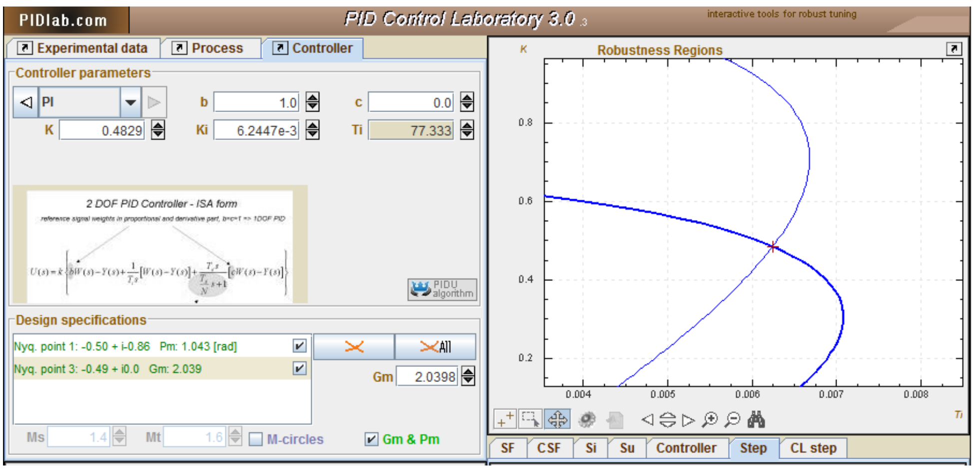
Na obr.3-5 jsou výsledky v Matlab ověřeny v programu PIDlab volně dostupným na internetu. Na obr.3 je ukázán způsob zadání parametrů systému do programu PIDlab a graf výsledných parametrů regulátoru. Na obr.4 je zobrazena přenosová funkce systému, na obr.5 je zobrazena Nyquistova křivka systému a jeho odezva na jednotkový skok.

1.5 Závěr

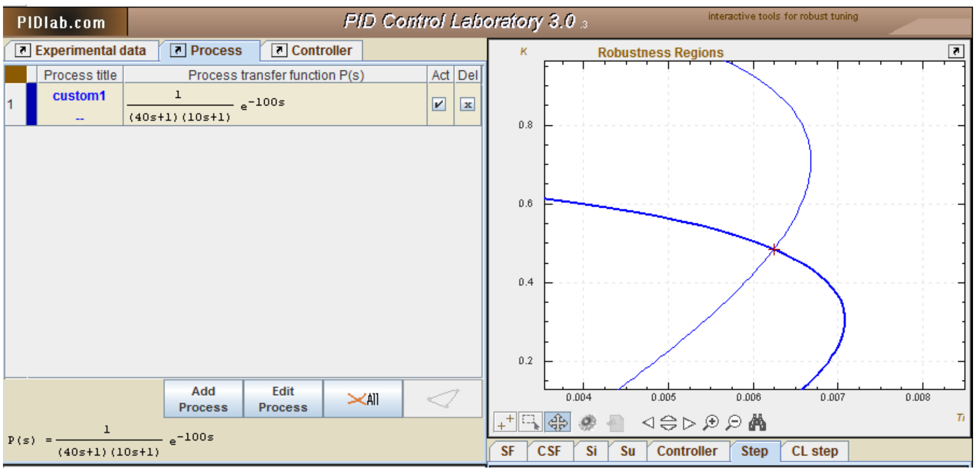
V této zprávě je představen návrh PI regulátoru založený na metodě tvarování Nyquistovy křivky. Tato metoda dále umožňuje navrhnout PID regulátor se dvěma stupni volnosti pro



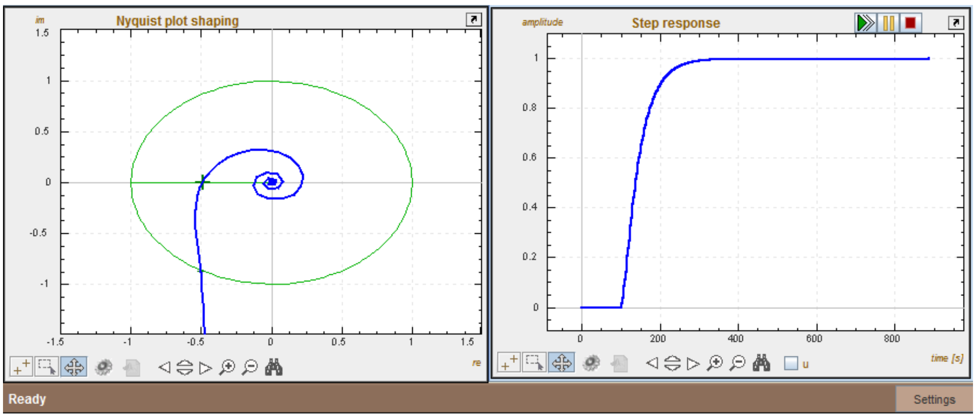
Obr. 2: Parametry regulátoru k, ki



Obr. 3: Tvarování Nyquistovy křivky v programu PIDlab



Obr. 4: Tvarování Nyquistovy křivky v programu PIDlab_2



Obr. 5: Tvarování Nyquistovy křivky v programu PIDlab_3

návrhové požadavky běžně používané v praxi, tj. bezpečnost v zesílení a bezpečnost ve fázi. Metoda je použitelná pro libovolný lineární systém (nestabilní, neminimálně fázový) s dopravním zpožděním. Nejvhodnější je tato metoda pro nekmitavé nebo slabě kmitavé procesy, u kterých jsou požadavky na tvar Nyquistovy křivky dobře známy. Pomocí tohoto kritéria však není možné specifikovat požadavek na hladkost přechodové charakteristiky.

2 Přiřazení pólů stavovou zpětnou vazbou

Zpětnou vazbou se snažíme přiřadit systému námi požadované chování, které budeme určovat zvolenými póly. Rozmístění pólů uzavřeného systému v libovolné předem zadané body komplexní roviny a různá zobecnění a modifikace této úlohy tvoří intenzivně se rozvíjející předmět teorie automatického řízení nazývaný často modální řízení. Pólům odpovídají příslušné vlastní volné pohyby systému, které se často nazývají módy. Je možné chápat modální řízení jako zobecnění techniky geometrického místa kořenů. V této části budou popsány metody přiřazení pólů stavovou zpětnou vazbou.

2.1 Úvod

Dynamické chování autonomního systému je dáno vlastními čísly matice dynamiky. Chceme-li změnit jeho vlastnosti, např. z nestabilního systému udělat stabilní, nebo z pomalého systému rychlý, zavedeme zpětnou vazbu. Jedním z významných problémů v teorii lineárních systémů je přiřazení pólů zpětnou vazbou. Zpětnou vazbou se snažíme přiřadit systému námi požadované chování, které bude určeno zvolenými póly. Jestliže volíme póly reálné (imaginární složky β jsou nulové), výsledný regulační pochod bude aperiodický. Pokud se mezi zvolenými póly budou vyskytovat dvojice pólů komplexně sdružených, bude výsledný pochod kmitavý. Rychlost regulačního pochodu je dána velikostí reálných složek pólů. Čím budou vzdálenější od nuly (v záporném smyslu), tím bude regulační pochod rychlejší, ovšem s vyššími nároky na akční veličinu. Samozřejmě, že póly nemusí být zvoleny jako různé, mohou se vyskytovat póly vícenásobné.

2.2 Zpětná vazba

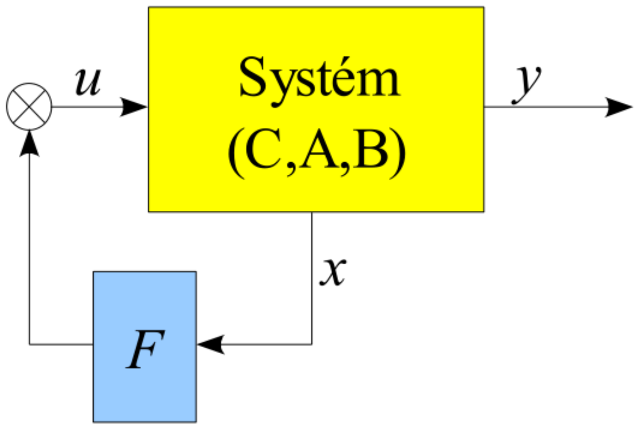
Je uvažován systém popsaný danými statovými rovnicemi systému:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{8}$$

V tomto případě x reprezentuje stav systému, u představuje jeho vstup a y výstup. Vlastní dynamické chování systému je určeno jeho autonomí částí (tj. $\dot{x} = Ax$), konkrétně vlastními čísly a vlastními vektory matice A. Chceme-li změnit vlastnosti systému, např. z nestabilního systému udělat stabilní, nebo z pomalého systému rychlý, zavedem zpětnou vazbu. Podle toho, jaké hodnoty je možné měřit, rozlišujeme stavovou a výstupní zpětnou vazbu.

Rozlišujeme následující typy zpětných vazeb:

- stavová zpětná vazba $u = Fx$
- výstupní zpětná vazba $u = Ky$



Obr. 6: Stavová zpětná vazba

- výstupní dynamická zpětná vazba $U(s) = C(s)Y(s)$

Zpětnou vazbou od výstupu y lze měnit pouze vlastní čísla matice A odpovídající řiditelnému a pozorovatelnému podprostoru. Tedy pouze póly přenosu systému.

Vlastní dynamické chování systému je dáno autonomní částí ($\dot{x} = Ax$), konkrétně vlastními čísly a vlastními vektory matice A. Protože chceme získat stabilní systém, musíme všechny póly uzavřeného systému umístit do otevřené levé poloroviny komplezní roviny. K tomuto účelu je možné použít zpětnou vazbu. V této práci bude navržena stavová zpětná vazba F $(u = Fx)$.

K využití je možné použít stavovou zpětnou vazbu v případě, že můžeme měřit celý stav systému.

$$\begin{gathered}\dot{x} = Ax + Bu \\ u = -Fx \\ \dot{x} = Ax + B(-Fx) = (A - BF)x \\ \dot{x} = (A - BF)x \\ y = Cx\end{gathered} \tag{9}$$

Zavedení stavové zpětné vazby změnilo původní matici systému. Výstupní rovnice se nezměnila.

Vhodnou volbou prvků F můžeme libovolně (až na komplexně sdružené dvojice) umístit vlastní čísla matice $A_{new} = A - BF$ a to právě pokud je soustava řiditelná. Můžeme tedy libovolně umístit póly výsledného systému: $det(sI - A) \Longrightarrow det(sI - A_{new}) = det(sI - (A - BF))$.

Stavová zpětná vazba slouží k řízení stavů systémů. Je zřejmé, že je možné řídit pouze ty stavy, které je možné pomocí vstupu ovlivňovat (dosažitelný systém).

Volba vlastních čísel matice $A - BF$ je kompromis mezi rychlostí odezvy systému a velikosti řídicích veličin u. Pro použití stavového regulátoru musíme měřit stavy systému x nebo je nějak odhadovat, například pomocí pozorovatele stavu.

Luenbergerův rekonstruktor stavu Popsaná metoda řízení ve stavovém prostoru předpokládají znalost stavu řízeného systému. Z praktického hlediska je tento požadavek nereálný. Východiskem z této situace je pozorovat resp. odhadovat stav systému na základě měřených prvků výstupního vektoru systému.

Z hledisek členění systémů je členění na systémy deterministické a systémy stochastické. V dalším se omezíme na odhad stavu deterministického systému, ve kterém nepůsobí významnější šumy nebo význěmnější poruchy měření. Člen zabezpečující odhad stavu je nazýván rekonstruktor stavu (estimátor, pozorovač stavu).

Je uvažován pozorovatelný (a tedy i rekonstruovatelný) systém popsaný:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{10}$$

V dalším kroku je zaveden vektor odhadů stavových veličin $\hat{x}(t)$:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A'\hat{x}(t) + \mathbf{B}'\hat{x}(t) + Ly(t) \tag{11}$$

úlohou je navrhnout matici L tak, aby se chyba odhadu (odchylka mezi skutečnými a odhadovanými stavovými veličinami) asymptoticky blížila k nule:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{12}$$

V následujících odstavcích budou představeny různé metody přiřazení pólů a jejich řešení je ověřeno na příkladech v programu Matlab.

2.3 Přiřazení pólů pomocí kanonické formy řiditelnosti

V tomto odstavci je pro úplnost představen jeden z možných postupů přiřazení pólů.

Nejprve je stavový model převeden na přenos:

$$
\begin{gathered}
sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \\
(sI - A)X(s) = BU(s) + x_0 \\
X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}x_0 \\
Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]\,U(s) + C(sI - A)^{-1}x_0 \\
Y(s) = \frac{q(s)}{p(s)}U(s) + \frac{r_{s_0}(s)}{p(s)} \\
p(s) = det(sI - A) \\
q(s) = Cadj(sI - A)B + D \\
r_{x_0} = Cadj(sI - A)x_0
\end{gathered} \tag{13}
$$

V následující rovnici je představena kanonická forma řiditelnosti (stavové rovnice z přenosu):

$$
\begin{gathered}
\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1s^2+7s+2}{1s^3+9s^2+26s+24} \\
\dot{x} = \begin{bmatrix} -9 & -26 & -24 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} x
\end{gathered} \tag{14}
$$

V dalším kroku nazvaném transformace je stavová proměnná x nahrazena novou proměnnou z určenou lineární transformací souřadnic $x = Tz$, kde T je nesingulární matice, takže platí $z = T^{-1}x$.

Po dosazení dostaneme:

$$
\begin{gathered}
\dot{x} = T\dot{z} = FTz + Gu \\
y = HTz + Ju \\
\dot{z} = T^{-1}FTz + T^{-1}Gu \\
y = HTz + Ju \\
\dot{z} = Az + Bu \\
y = Cz + Du \\
A = T^{-1}FT \\
C = HT \\
B = T^{-1}G \\
D\text{=J}
\end{gathered} \tag{15}
$$

Transformační matice je známa, a tak je snadno možné ze starých stavových rovnic vypočítat nové.

Pro reálné aplikace je matice $D = 0$ - signál se šíří konečnou rychlostí.

Jak najít tranformační matici pokud známe staré i nové stavové rovnice? K nalezení tranformační matice T využijeme tvaru matic A, B:

$$
\begin{gathered}
A = T^{-1}FT \Rightarrow AT^{-1} = T^{-1}F \\
T^{-1} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \\
t_2 = t_3F \\
t_1 = t_2F = t_3F^2 \\
B = T^{-1}G \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} G \\
t_3G = 0 \\
t_2G = 0 = t_3FG \\
t_1G = 1 = t_3F^2G \\
t_3 \begin{bmatrix} G & FG & F^2G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Tranformační matice je tedy nalezena z předchozích odvození:

$$
t_3 \begin{bmatrix} G & FG & F^2G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow t_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & FG & F^2G \end{bmatrix}^{-1} \tag{17}
$$

2.4 Stavový regulátor založený na Ackermanově formulaci

V následujícím odstavci je stručně představen stavový regulátor založený na Ackermanově formulaci. Nejdříve je opět představen přenos systému:

$$
\begin{gathered}
\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\
u(t) = -Rx(t) \\
\dot{x}(t) = (A - BR)x(t)
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Vlastní čísla $(A - BR)$ jsou póly stavové zpětné vazby.

Zpětnovazební řádková matice je definována Ackermanovou formulí:

$$
R = eQ_R^{-1}P_n(A) \tag{19}
$$

kde řádkový vektor $e(1xn)$ je : $e = (00...01)$ a Q_R je matice řiditelnosti.

Také platí:

$$P_n(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + .. + c_1 A + c_0 I \tag{20}$$

zbývající řádky vypočteme z rovnic:

$$\begin{aligned} t_2 &= t_3 F \\ t_1 &= t_2 F = t_3 F^2 \end{aligned} \tag{21}$$

2.5 *Příklady*

Umístění pólů stavovou zpětnou vazbou je možné řešit naivním postupem. Tento postup je schůdný pro jednoduché případy.

```
%Naivni metoda - neschudna pro slozitejsi priklady
omega0=1; A=[0 1; -omega0^2 0]; B=[0; 1];
C=eye(2); D= [0;0];
pend=ss(A,B,C,D)

K=[3*omega0^2 4*omega0^2]
Anew=A-B*K
pend_FB=ss(Anew,B,C,D);
```

Umístění pólů pro obecný systém je ukázáno ve druhém příkladu. Rovnice v tomto případě nejsou v kanonické formě řiditelnosti. Je tedy nutné pomocí matice řiditelnosti vypočítat tranformační matici T a převést rovnice s maticemi A, B do kanonické formy řiditelnosti. Dále je vypočtena matice ZV, kterou je nutné dále transformovat do původních souřadnic.

```
%Obecny system
s=tf('s');
F=[0 1 0; 0 -2 2; 0 0 -8];
G=[0; 0; 60];
CONT=[G F*G F*F*G];
CONTi=inv(CONT);
t3=CONTi(3,:);
Ti=[t3*F^2; t3*F; t3];
T=inv(Ti);
%transformace do kanonicke formy riditelnosti
Fcon=Ti*F*T
Gcon=Ti*G

pOL=s^3-Fcon(1,:)*[s^2;s;1]
pCL=(s+15)*(s+2+2*j)*(s+2-2*j)

K=pCL- pOL;
Kcon=fliplr(K);
```

```
[num,den]=tfdata(Kcon,'v');
Kcon=num
Fnewcon=Fcon-Gcon*Kcon
% Tranformace vysledku do puvodni formy
K=Kcon*Ti
Fnew=F-G*K
eig(Fnew)
SI=s*eye(3)
DET=SI-Fnew
```

Dalším možným postupem v programu Matlab je použití funkce *place*:

```

A=[0 1 0; 0 -2 2; 0 0 -8];
B=[0;0;60];
C=[1 0 0];
D=0;

[b,a]=ss2tf(A,B,C,D);
G=tf(b,a)

KKK=place(A,B,[-2+2*j, -2-2*j, -15])
Anew=A-B*KKK
[bnew,anew]=ss2tf(Anew,B,C,D)
Gnew=tf(bnew,anew)
```

2.6 Přiřazení Jordanovy formy

Tato práce se zabývá problémem stabilizace stavovou zpětnou vazbou. Je nutné nalézt zpětnou vazbu, která bude uzavřenému systému přiřazovat požadovanou Jordanovu formu (pro ni bude uzavřený systém dostatečně robustní a nebude křehká). Přiřazení pólů stavovou zpětno vazbou za použití Jordanovy formy je možné i pro více rozměrné systémy. Řešení Sylvestrovy matice je možné pro reálné i komplexní výpočty. Pro zkoumaný systém je nutné nalézt stavovou zpětnou vazbu F takovou, aby matice dynamiky uzavřeného systému $A_C = A+BF$ měla požadovanou Jordanovu formu. Takových zpětných vazeb je obecně nekonečně mnoho. Je nutné se dále zabývat problémem návrhu zpětné vazby, která bude daný systém jednak stabilizovat a navíc v jistém smyslu optimalizovat. V práci [4] je zvolen přítup založený na minimální parametrizaci množiny všech stavových zpětných vazeb přiřazující požadovanou Jordanovu formu, která vedle stability zajišťuje i požadované chování uzavřené smyčky. Optimalizace se tak nemusí provádět vzhledem ke všem prvkům matice zpětné vazby, ale vystačíme s mnohem méně parametry, což je při následné numerické optimalizaci velice výhodné.

2.6.1 Vlastní čísla

Nechť A je čtvercová matice n-tého řádu. Polynom $p(\lambda) = det(\lambda I - A)$ nazýváme charakteristickým polynomem matice A. Kořeny polynomu $p(\lambda)$ se nazývají vlastní čísla matice A. Vlastní čísla jsou tedy kořeny příslušného charakteristickéhoo polynomu. Protože pro výpočet kořenů polynomů pátého a vyššího stupně neexistuje obecný vzorec, nelze ani vlastní čísla matice těchto řádů vypočítat v konečném počtu kroků. Numerické metody na výpočet vlastních čísel se liší podle toho, zda chceme nalézt všechna vlastní čísla (úplný problém), nebo jen některá (částečný problém).

Podmínky existence:

- (A, B) jsou řiditelné
- A, B nemají společná vlastní čísla

2.6.2 Princip metody

Matice A a L jsou podobné právě tehdy, jesltiže existuje regulární matice T taková, že $A = TLT^{-1}$. Jeli matice A podobná matici L, potom mají stejná vlastní čísla ($\sigma(A) = \sigma(L)$), $det(\lambda I - A) = det(\lambda I - TBT^{-1})$. Rovnost vlastních čísel nepostačuje pro platnost tvrzení $A \sim L$. Naproti tomu stejné Jordanovy formy matic A a L jsou nutnou i postačující podmínkou pro $A \sim L$.

Chceme-li tedy přiřadit zpětnou vazbou skutečně všechny spektrální vlastnosti zvolené matice dynamiky L, potom musíme přiřazovat Jordanovu formu a nikoli pouze vlastní čísla.

Pro uvedený systém tak chceme nalézt stavovou zpětnou vazbu F takovou, aby matice dynamiky uzavřeného systému $A+BF$ měla požadovanou Jordanovu formu. Takových stavových zpětných vazeb je obecně nekonečně mnoho. Problémem návrhu stavové zpětné vazby, která bude daný systém jednak stabilizovat a navíc i v jistém smyslu optimalizovat se zabývá [4].

$$A + BF = TLT^{-1} \tag{22}$$

Po úpravě dostaneme Sylvestrovu matici:

$$AT - TL + BFT = 0 \tag{23}$$

$$\begin{aligned} H &= FT \\ AT - TL + BH &= 0 \end{aligned} \tag{24}$$

H je parametrická matice. Pokud je (A, B) řiditelná, L je možné přiřadit. Matice A a L nemají v tomto případě stejná vlastní čísla, T vyhovuje Sylvestrovské matici.

Stavovou zpětnou vazbu, která systému (A, B) přiřadí požadovanou Jordanovu formu L, lze vyjádřit ve tvaru:

$$F(H) = HT^{-1}(H) \tag{25}$$

Výsledkem je následující procedura pro výpočet žádané zpětné vazby F:

- Zvolíme náhodně matici $H - randn(m, n)$
- Vyřešíme maticovou rovnici (soustava lineárních rovnic)$X = lyap(A, -L, B * H)$

  $$AX - XL + BH = 0$$

  Řešení X je regulární.

  $$A + BHX^{-1} = XLX^{-1}$$
  $$F = HX^{-1}$$

  je hledaná zpětnovazební matice $F = H \cdot inv(X)$, *která řeší přiřazení Jordanovy formy pomocí zpětné vazby.*

Přiřazení Jordanovy formy pro lineární vícerozměrný řídicí systém je formulován a vyřešen pomocí Sylvestrovy matice.

Všechna řešení jsou parametrizována maticí H, $F(H) = HX^{-1}(H)$.

Parametrizace pomocí matice H je redundantní, tedy dává přebytečný počet parametrů, který by zejména při následné numerické optimalizace stal velmi nežádoucím. Proto je užitečné přejít k minimální parametrizaci, čímž se počet parametrů výrazně sníží. Problémem minimální parametrizace se zabývá [4].

2.6.3 Příklady

Inverzní kyvadlo Příklad s využitím Jordanovy formy byl použit pro model inverzního kyvadla na vozíku:

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_1 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml} \end{bmatrix} \tag{26}$$
$$\sigma(A) = \left\{0, 0, \pm\sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}}\right\}$$

Z vlastních čísel matice A je zřejmé, že systém (A, b) je nestabilní.

Systém (A, b) je řiditelný. Matice řiditelnosti má plnou hodnost:

$$rank \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix} = 4$$

Pro zvolené hodnoty $m = 0.1kg$, $M = 2kg$, $l = 0.5m$, $g = 9.81m/s^2$ vychází vlastní čísla matice A : $\sigma(A) = \{0, 0, -4.53, 4.53\}$. Pokud chceme, aby vlastní čísla ležela v: $\sigma(A + bk) = \{-4, -3, -2, -1\}$, je nutné zvolit k následovně: $k = \begin{bmatrix} 2.44 & 5.10 & -56.8 & -12.5 \end{bmatrix}$. Zde je uveden příklad výpočtu v programu Matlab.

```
% jednorozmerny system - prednaska
m=0.1;
M=2;
l=0.5;
g=9.81;
A=[0, 1, 0, 0; 0, 0, m*g/M, 0; 0, 0, 0, 1; 0, 0, (M+m)*g/(M*l), 0];
eig(A);
B=[0; 1/M; 0; 1/(M*l)];
CO = ctrb(A,B)
rank(CO)
H=randn(1,4);
L=[-4,0,0,0;0,-3,0,0;0,0,-2,0;0,0,0,-1];
J=jordan(L);
X=lyap(A,-L,B*H);
F=H*inv(X);
```

Vícerozměrný sytém Zde je uveden příklad použití přiřazení pólů pomocí Jordanovy formy pro vícerozměrný systém. Vícerozměrný systém je popsán maticemi:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m \cdot g}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m) \cdot g}{M \cdot l} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{M \cdot l} \end{bmatrix} \tag{27}$$

```
%vicerozmerny system
 clear;clc;
```

```
A=[1,0,1,3,0; 0,1,1,2,1; 1,2,1,3,3; 2,2,0,2,1; 0,1,2,2,3]
eig(A)
B=[1,0;0,0;0,0;0,1;0,0]
CO = ctrb(A,B)
rank(CO)
H=randn(2,5);
L=[-1,1,0,0,0; 0,-1,0,0,0; 0,0,-2,0,0; 0,0,0,-1,0;0,0,0,0,0]
J=jordan(L)
X=lyap(A,-L,B*H)
F=H*inv(X)
```

Podle předchozích informací umíme explicitně vypočítat stavovou zpětnou vazbu pro námi zadaný systém. Získaný uzavřený systém je stabilní pro libovolnou zpětnou vazbu z množiny $F_S(A, B, L)$. V matici stavové zpětné vazby se vyskytují návrhové parametry. Díky těmto parametrům je možné zvolit matici F tak, aby uzavřený systém byl v nějakém smyslu nejlepší.

Stejnosměrný motor Dalším praktickým příkladem je řízení proudu stejnosměrnéh motoru. Motor je popsán následujícími parametry:

(J) moment setrvačnosti rotoru 0.01 kg.m^2

(b) konstanta viskózního tření 0.1 N.m.s

(Ke) konstanta elektromotorické síly 0.01 V/rad/sec

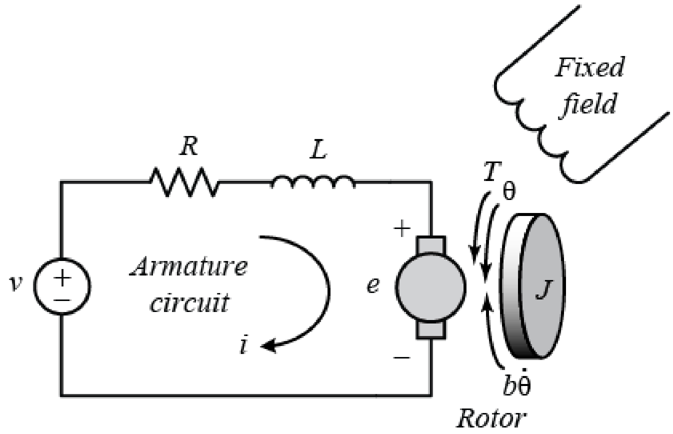
(Kt) konstanta momentu motoru 0.01 N.m/Amp

(R) elektrický odpor 1 Ohm

(L) indukčnost 0.5 H

Stavový model stejnosměrného motoru s permanentními magnety je popsán maticemi:

$$
\begin{aligned}
A = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J} & \frac{K}{J} & 0 \\ 0 & -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
B = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \\
C = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
D = & \; 0
\end{aligned}
\tag{28}
$$



Obr. 7: Schéma stejnosměrného motoru

```
J = 3.2284E-6;
b = 3.5077E-6;
K = 0.0274;
R = 4;
L = 2.75E-6;

A = [0 1 0 0
     0 -b/J K/J 0
     0 -K/L -R/L 0
     1 0 0 0];
B = [0 ; 0 ; 1/L ; 0 ];
C = [1 0 0 0];
D = [0];
motor_ss = ss(A,B,C,D);

CO = ctrb(A,B);
rank(CO);
sys_order = order(motor_ss);
determinant = det(ctrb(A,B)); % plna matice ma nenulovy determinant

%umisteni polu pomoci place
p1 = -100+100i;
p2 = -100-100i;
p3 = -200;
p4 = -300;
K = place(A,B,[p1,p2,p3,p4])%place je pro vypocet lepsi nez acker

%prirazeni Jordanovy formy
H=randn(1,4);
L=[p1,0,0,0; 0,p2,0,0; 0,0,p3,0; 0,0,0,p4];
L_2=jordan(L);
```

```
X=lyap(A,-L,B*H);
F=H*inv(X)
```

Parametry byly nalezeny pomocí Jordanovy formy v matici F a pomocí příkazu $place$ v matici K. Z výsledků je patrné, že obě zpětné vazby jsou stejné. Rozdílnost znamének vychází z předpisu pro stavovou zpětnou vazbu ($u = Fx$ pro Jordanovu formu a $u = -Fx$ pro příkaz $place$).

$$
\begin{aligned}
K &= \begin{bmatrix} 0,0071 \\ -0,0273 \\ -3,9981 \\ 0,3888 \end{bmatrix} \\
F &= \begin{bmatrix} -0,0071 \\ 0,0273 \\ 3,9981 \\ -0,3888 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{29}
$$

2.7 Závěr

Součástí návrhu regulačního obvodu není ovšem pouze podmínka stability, která je nutnou podmínkou, ale také požadavky na kvalitu řízení. Je známo, že kvalita řízení (průběhy řízeného výstupu popř. akčního vstupu) je dána rozložením pólů přenosu uzavřeného regulačního obvodu. Celá klasická teorie řízení využívá k návrhu regulátoru nějakou formu matematického modelu systému, který chceme řídit. Zásadním problémem je, že uvažovaný ideální matematický model se prakticky nikdy přesně neshoduje s chováním reálného systému. Tento rozpor je zapřičiněn mnoha důvody. Například fyzikální parametry řízeného procesu nám nemusejí být přesně známy, případně se mohou měnit v čase. Dále je často zanedbána nelinearita řízeného systému a nesoulad vznikne díky jeho lineární aproximaci v daném pracovním bodě.

Další problém spočívá v tom, že v obecném případě systému s více vstupy uvedené požadavky neurčují jednoznačně příslušnou zpětnou vazbu. Z celé množiny řešení je potom nutné vybrat tu zpětnou vazbu, která vyhovuje dodatečným podmínkám - například tu, jejíž některá norma je minimální, jejíž některé prvky jsou nulové a nebo tu, která minimalizuje některou jinou kriteriální funkci.

References

[1] M. Schlegel, *Modální řízení konečně rozměrných lineárních systémů*. Plzeň, 1984.

[2] M. Schlegel, "Nový přístup k robustnímu návrhu průmyslových regulátorů," *Habilitační práce, ZČU v Plzni*, 2000.

[3] Č. Martin and S. Miloš, "Pid controller design on internet: www. pidlab. com," *Department of Cybernetics, University of West Bohemia in Pilsen*, 2006.

[4] M. Schlegel and J. Königsmarková, "Parametric jordan form assignment revisited," *Asian Journal of Control*, 2013.

Seznam obrázků

Historie revizí

Rev.	Kapitola	Popis změny	Datum, Jméno/Odd.
1	všechny	První verze	5.11.2013 VM / KEV