

Momentové rovnice synchronních strojů

Pracoviště: KEV, RICE
Číslo dokumentu: Číslo výzkumné zprávy 22190 – 010 – 2020
Typ zprávy: Výzkumná
Řešitelé: Jan Laksar
Vedoucí projektu: Jan Laksar
Počet stran: 29
Datum vydání: 24. 6. 2020
Oborové zařazení: 2.2 Electrical engineering, Electronic engineering,
Information engineering - Electrical and electronic
engineering

Zadavatel / zákazník:

Zpracovatel / dodavatel:
Západočeská univerzita v Plzni
Regionální inovační centrum
elektrotechniky
Univerzitní 8
306 14 Plzeň
Kontaktní osoba:
Jan Laksar
tel. 377634474
laksar@rice.zcu.cz

Tato zpráva vznikla s podporou projektu Konstrukce a technologie synchronních generátorů s permanentními magnety nové generace, FW01010295 a v rámci projektu SGS-2018-009: Výzkum a vývoj perspektivních technologií v elektrických pohonech a strojích III

Anotace

Tato výzkumná zpráva přináší ucelený přehled synchronních strojů, porovnání rovnic pro výpočet momentu používaných v teorii elektrických strojů a teorii řízení a jejich odvození. Kromě tradičních rovnic zanedbávajících velikost odporu jsou odvozeny také rovnice uvažující odpor vinutí. Na závěr je provedeno porovnání výpočtů analytických a pomocí metody konečných prvků a jsou diskutovány výsledky. Všechny výpočty jsou postupně provedeny pro synchronní stroj s hladkým rotorem (povrchovými magnety), stroj reluktanční a stroj s vyniklými póly nebo podpovrchovými magnety.

Klíčová slova

Momentová rovnice, synchronní stroj

Název zprávy v anglickém jazyce / Report title

Torque equations of synchronous machines

Anotace v anglickém jazyce / Abstract

This research report provides a comprehensive overview of synchronous machines, comparison of torque equations used in the theory of electrical machines and theory of machine control and derivation of the equations. Except the equations neglecting the armature resistance, the equations including the armature resistance are derived. The last part of the report consists of comparison of analytical and finite element calculations and the results are discussed. All calculations are focused on the synchronous machines with cylindrical rotor (surface-mounted magnets), reluctance machine and salient pole / embedded magnets rotor.

Klíčová slova v anglickém jazyce / Keywords

Torque equation, synchronous machine

Seznam symbolů a zkratk

I	proud	(A)
L	indukčnost	(H)
M	moment	(Nm)
m	počet fází	(-)
p	počet pólpárů	(-)
P	výkon	(W)
R_a	odpor vinutí	(Ω)
U	napětí	(V)
U_{ib}	buzené indukované napětí	(V)
X	reaktance	(Ω)
Z	impedance	(Ω)
β	zátěžný úhel	(rad), ($^\circ$)
ρ	úhel natočení fázoru impedance vlivem odporu	(rad), ($^\circ$)
Ψ_b	tok rotorového buzení	(Wb)
ω	elektrická úhlová rychlost	(rad s ⁻¹)
d	podélná osa	
e	vnější	
i	vnitřní	
m	amplituda	
q	příčná osa	

Obsah

1	ÚVOD	5
2	2 OBECNÉ NÁHRADNÍ SCHÉMA A VÝPOČET MOMENTU.....	6
3	MOMENTOVÉ ROVNICE PŘI ZANEDBÁNÍ ODPORU VINUTÍ $R_A = 0$	8
3.1	STROJ S HLADKÝM ROTOREM / POVRCHOVÝMI MAGNETY; $L_D = L_Q$	8
3.2	SYNCHRONNÍ RELUKTANČNÍ STROJ; $L_D > L_Q$	9
3.3	SYNCHRONNÍ STROJ S VYNIKLÝMI PÓLY / PODPOVRCHOVÝMI MAGNETY; $L_D > L_Q$ / $L_D > L_Q$	10
3.3.1	<i>Stroj s podpovrchovými magnety</i>	11
4	MOMENTOVÉ ROVNICE PŘI UVAŽOVÁNÍ ODPORU VINUTÍ R_A.....	12
4.1	STROJ S HLADKÝM ROTOREM / POVRCHOVÝMI MAGNETY; $L_D = L_Q$	12
4.2	SYNCHRONNÍ RELUKTANČNÍ STROJ; $L_D > L_Q$	13
4.3	SYNCHRONNÍ STROJ S VYNIKLÝMI PÓLY / PODPOVRCHOVÝMI MAGNETY; $L_D > L_Q$ / $L_D > L_Q$	16
5	MOMENTOVÉ CHARAKTERISTIKY	19
6	POROVNÁNÍ VÝPOČTŮ MOMENTU	22
7	ZÁVĚR	25

1 Úvod

Pro správný návrh stroje a jeho pracovního bodu je nutné znát náhradní schéma, fázorový diagram a vzorec pro výpočet momentu co nejvíce odpovídající reálnému stroji. Tomu se lze přiblížit zahrnutím odporu vinutí do výpočtu momentu stroje. Z literatury je známa takto upravená momentová charakteristika pouze pro stroj s povrchovými magnety. Prvotním impulzem pro vytvoření této zprávy tak bylo odvození obecného vztahu momentu synchronních strojů včetně uvažování odporu vinutí.

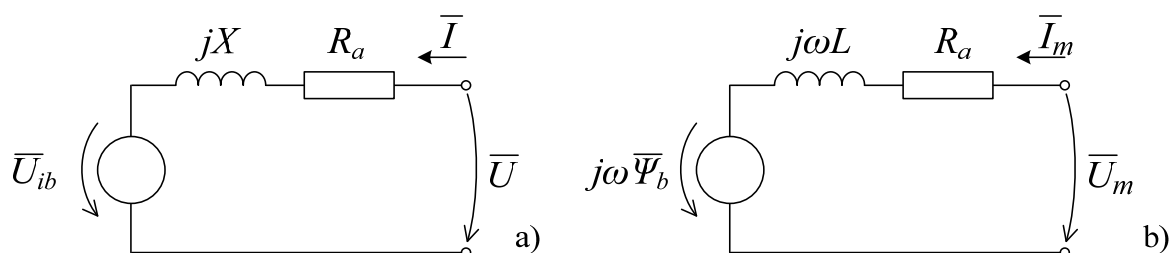
2 2 Obecné náhradní schéma a výpočet momentu

Parametry náhradního schématu jsou spojovacím bodem mezi výpočtářem provádějícím návrh elektrického stroje, který tyto parametry určuje na základě geometrie stroje, použitých materiálů, počtu závitů apod., a člověkem zabývajícím se řízením navrženého stroje. Obecné fázové náhradní schéma synchronního stroje se skládá z indukovaného napětí buzeného rotorovým vinutím nebo permanentními magnety $\bar{U}_{ib}$, reaktance vinutí (obecně) a odporu jedné fáze vinutí R_a .

Při návrhu stroje je důležitý zejména přenos výkonu a tepelný projev stroje, proto se používají efektivní hodnoty elektrických veličin, u veličin magnetických se však většinou setkáme s amplitudami.

Teorie řízení je většinou založena na harmonických průbězích jednotlivých veličin, jejich součtu a rozkladu do vhodných složek – proto se v elektrických pohonech jednotně používají amplitudy bez ohledu na druh veličin (elektrické vs. magnetické).

Na Obr. 1 je zobrazeno obecné náhradní schéma synchronního stroje v ustáleném stavu používané v teorii elektrických strojů (a) a v elektrických pohonech (b). Obě schémata zahrnutí pouze ztráty Jouleovy ve vinutí a stejně bude uvažováno i při výpočtu momentu stroje.



Obr. 1: Náhradní schéma synchronního stroje v ustáleném stavu pro použití v teorii elektrických strojů (a) a pro elektrické pohony (b)

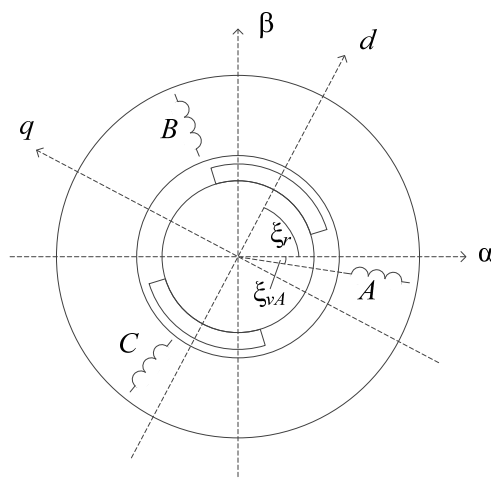
Mezi oběma schématy lze jednoduše převádět pomocí následujících vztahů:

$$\begin{aligned}\bar{U}_{ib} &= \frac{j\omega\bar{\Psi}_b}{\sqrt{2}} \\ X &= \omega L \\ I &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \\ U &= \frac{U_m}{\sqrt{2}},\end{aligned}\tag{2.1}$$

kde ω je elektrická úhlová rychlost, Ψ_b je tok rotorového buzení spřažený s vinutím, L je indukčnost vinutí a I , I_m , U a U_m jsou efektivní a maximální hodnoty proudu a napětí. Aby přesně platily tyto vztahy, musí mít všechny veličiny čistě harmonický průběh. Toho není vždy dosaženo zejména u spřaženého toku a indukovaného napětí, které jsou závislé na geometrii stroje. Pro účely této práce budou harmonické průběhy všech veličin předpokládány.

Indukčnost a příslušná reaktance může být obecně rozdělena do dvou složek – příčná složka indukčnosti L_d ve směru osy d (viz Obr. 2) a na něj kolmá podélná složka indukčnosti L_q ve

směru osy q . V závislosti na typu stroje tak bude v náhradním schématu figurovat pouze podélná indukčnost, nebo bude nutné schéma rozdělit pro podélný a příčný směr. Spřažený tok rotorového buzení bude mít v tomto souřadném systému pouze d -složku, naopak indukované buzení napětí pouze kladnou q -složku.



Obr. 2: Definice souřadných systémů synchronního stroje

Vnitřní výkon P_i m -fázového synchronního stroje lze určit jako

$$P_i = m \Re\{\bar{U}_{ib} \bar{I}^*\}, \quad (2.2)$$

kterému odpovídá moment

$$M_i = \frac{pm}{\omega} \Re\{\bar{U}_{ib} \bar{I}^*\}, \quad (2.3)$$

kde p je počet pólů. Obdobně lze vnitřní moment stroje určit také jako

$$M_i = \frac{pm}{2} \Im\{\bar{\Psi}^* \bar{I}_m\} \quad (2.4)$$

Kladný směr napětí i proudu představuje kladný výkon a motorický režim stroje, naopak záporný směr proudu značí záporný výkon a moment a generátorický režim stroje. Zatížení stroje lze také dobře posoudit podle tzv. zátěžného úhlu β , který je definovaný jako úhel mezi podélnou osou rotoru a hlavním polem stroje, udávaný v elektrických stupních [1]. Pro motorický režim je tak tento úhel záporný a pro generátorický režim kladný.

Hlavním cílem této práce je porovnat momentové rovnice používané v různých oblastech elektrických strojů. V těchto rovnicích často není uvažován elektrický odpor a úbytek napětí, resp. výkonu na něm. Výpočty budou vždy postupně provedeny pro synchronní stroj s hladkým rotorem / povrchovými magnety ($L_d = L_q$), synchronní reluktanční stroj ($L_d > L_q$) a synchronní stroj s vyniklými póly / podpovrchovými magnety ($L_d > / < L_q$).

3 Momentové rovnice při zanedbání odporu vinutí $R_a = 0$

Zanedbáním odporu dojde ke značnému zjednodušení náhradního schématu a výpočtu momentu stroje. Pro výpočet momentu dle (2.4) je vhodné uvažovat stroj v komplexní rovině d-q, kde osa d představuje reálnou a osa q imaginární složku. Celkový komplexně sdružený spřažený tok lze obecně vyjádřit jako

$$\bar{\Psi}^* = \Psi_b + L_d I_{dm} + L_q \cdot (-j) I_{qm} \quad (3.1)$$

a vnitřní moment bude

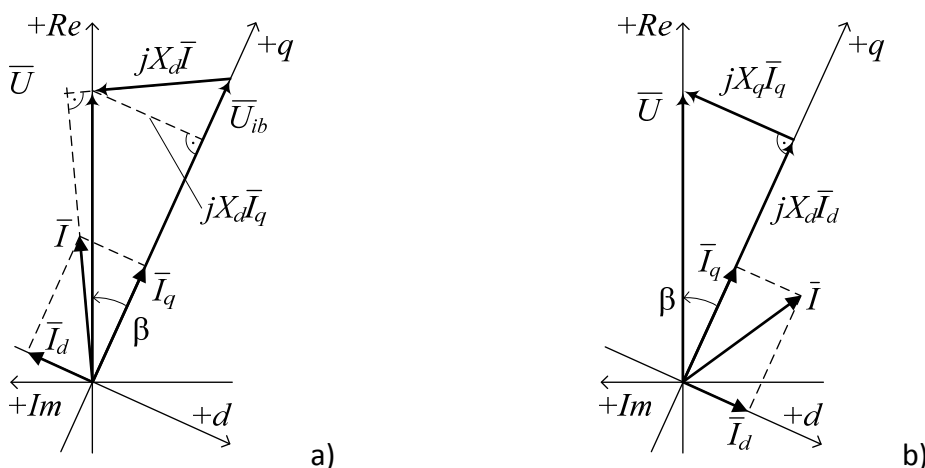
$$\begin{aligned} M_i &= \frac{pm}{2} \Im \{ (\Psi_b + L_d I_{dm} - j L_q I_{qm}) \cdot (I_{dm} + j I_{qm}) \} = \\ &= \frac{pm}{2} (\Psi_b I_{qm} + L_d I_{dm} I_{qm} - L_q I_{dm} I_{qm}) = \frac{pm}{2} [\Psi_b I_{qm} + (L_d - L_q) I_{dm} I_{qm}] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Takto vypadá univerzální momentová rovnice používaná v elektrických pohonech pro řízení synchronního stroje. Z hlediska teorie elektrických strojů není příliš vhodná, protože velikost proudu je brána jako důsledek velikosti přiloženého napětí a zatížení stroje. Druhým nedostatkem tohoto vyjádření je nemožnost určení maximálního momentu a přetžitelnosti stroje. Proto je vhodné také odvodit rovnice napěťové a vzájemně je porovnat.

3.1 Stroj s hladkým rotorem / povrchovými magnety; $L_d = L_q$

Pro stroj s hladkým rotorem, který je buzen elektricky nebo na němž jsou umístěny permanentní magnety, platí fázorový diagram dle Obr. 3 a), který je popsán rovnicí

$$\bar{U} = \bar{U}_{ib} + j X_d \bar{I} \quad (3.3)$$



Obr. 3: Fázorový diagram buzeného synchronního stroje s $L_d = L_q$ (a) a synchronního reluktančního stroje s $L_d > L_q$ (b) s $R_a = 0$ v motorickém režimu.

Pro zjednodušení výpočtů je svorkové napětí posazeno do reálné osy, tudíž platí $\bar{U} = U$ a pro indukované napětí $\bar{U}_{ib} = U_{ib} \angle \beta$. Komplexně sdružený proud pak lze vyjádřit na základě rovnice (3.3) jako

$$\bar{I}^* = \frac{\bar{U}^* - \bar{U}_{ib}^*}{jX_d^*} = \frac{U - U_{ib} \angle(-\beta)}{X_d \angle\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{U}{X_d} \angle \frac{\pi}{2} - \frac{U_{ib}}{X_d} \angle\left(-\beta + \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.4)$$

a vnitřní moment je pak roven

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{pm}{\omega} \Re\{\bar{U}_{ib} \bar{I}^*\} = \frac{pm}{\omega} \Re\left\{U_{ib} \angle \beta \cdot \left[\frac{U}{X_d} \angle \frac{\pi}{2} - \frac{U_{ib}}{X_d} \angle\left(-\beta + \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} = \\ &= \frac{pm}{\omega} \Re\left\{\frac{UU_{ib}}{X_d} \angle\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{U_{ib}^2}{X_d} \angle \frac{\pi}{2}\right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Reálnou část komplexního čísla lze získat, pokud jeho normu vynásobíme kosinem jeho argumentu, tedy:

$$M_i = \frac{pm}{\omega} \left[\frac{UU_{ib}}{X_d} \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{U_{ib}^2}{X_d} \cos \frac{\pi}{2} \right] = \frac{pm}{\omega} U \frac{U_{ib}}{X_d} \sin(-\beta) \quad (3.6)$$

Tato rovnice odpovídá běžné používanému vztahu pro určení momentu synchronního stroje s hladkým rotorem včetně správné orientace zátěžného úhlu a momentu. Z fázorového diagramu lze odvodit sinus zátěžného úhlu včetně jeho správné orientace jako

$$\sin \beta = -\frac{X_d I_q}{U} \quad (3.7)$$

a dosazením a úpravou dle (2.1) lze odvodit vztah

$$M_i = \frac{pm}{\omega} U \frac{U_{ib}}{X_d} \frac{X_d I_q}{U} = \frac{pm}{\omega} \frac{\omega \Psi_b I_{qm}}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{pm}{2} \Psi_b I_{qm}, \quad (3.8)$$

který odpovídá rovnici (3.4) pro $L_d = L_q$. To pouze potvrzuje správnost obou přístupů a jiný výsledek nemohl být očekáván.

3.2 Synchronní reluktanční stroj; $L_d > L_q$

Synchronní reluktanční stroj je z pohledu náhradního schématu pravým opakem buzeného stroje s hladkým rotorem; rotor je čistě pasivní bez vinutí nebo permanentních magnetů a moment je tvořen pouze rozdílnou magnetickou vodivostí a indukčností v podélné a příčné ose.

Stroj lze popsat rovnicí

$$\bar{U} = jX_d \bar{I}_d + jX_q \bar{I}_q, \quad (3.9)$$

Které odpovídá fázorový diagram na Obr. 3 b). Rovnici je možné rozdělit do složkového tvaru jako

$$\begin{aligned} U_d &= -X_q I_q \\ U_q &= X_d I_d, \end{aligned} \quad (3.10)$$

což vede na odlišná náhradní schémata pro směr podélný a příčný. Rovnici (3.9) lze rozšířit a upravit na

$$\bar{U} = jX_d \bar{I}_d + jX_q \bar{I}_q + jX_d \bar{I}_q - jX_d \bar{I}_q = jX_d \bar{I} + j(X_q - X_d) \bar{I}_q \quad (3.11)$$

Fázor příčné složky proudu lze zapsat jako $\bar{I}_q = I_q \angle \beta$ a jeho velikost lze obdobně jako u buzeného stroje s hladkým rotorem vyjádřit z fázorového diagramu:

$$I_q = -\frac{U}{X_q} \sin \beta \quad (3.12)$$

Rovnice (3.11) tak přejde do tvaru

$$\bar{U} = jX_d \bar{I} - j(X_q - X_d) \frac{U}{X_q} \sin \beta \angle \beta \quad (3.13)$$

Statorový proud tak bude (fázor napětí má pouze reálnou složku)

$$\bar{I} = \frac{U + j(X_q - X_d) \frac{U}{X_q} \sin \beta \angle \beta}{jX_d} = \frac{U}{X_d} \angle \left(-\frac{\pi}{2}\right) + (X_q - X_d) \frac{U}{X_d X_q} \sin \beta \angle \beta \quad (3.14)$$

a jeho komplexně sdružená hodnota je

$$\bar{I}^* = \frac{U}{X_d} \angle \frac{\pi}{2} + (X_q - X_d) \frac{U}{X_d X_q} \sin \beta \angle (-\beta) \quad (3.15)$$

U reluktančního stroje je možné určit pouze moment odpovídající výkonu na svorkách stroje, který se při nulovém odporu vinutí bude rovnat vnitřnímu momentu:

$$\begin{aligned} M_e = M_i &= \frac{pm}{\omega} \Re\{\bar{U} \bar{I}^*\} = \frac{pm}{\omega} \Re\left\{\frac{U^2}{X_d} \angle \frac{\pi}{2} + (X_q - X_d) \frac{U^2}{X_d X_q} \sin \beta \angle (-\beta)\right\} = \\ &= \frac{pm}{\omega} \left[\frac{U^2}{X_d} \cos \frac{\pi}{2} + (X_q - X_d) \frac{U^2}{X_d X_q} \sin \beta \cos(-\beta) \right] = \\ &= \frac{pm}{\omega} U^2 \frac{(X_d - X_q)}{X_d X_q} \sin(-\beta) \cos(-\beta) = \frac{pm}{\omega} \frac{U^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin(-2\beta) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Tato rovnice opět odpovídá běžné používaným rovnicím pro určení momentu reluktančního synchronního stroje včetně správné orientace zátěžného úhlu. Z fázorového diagramu lze určit sinus a kosinu zátěžného úhlu jako

$$\begin{aligned} \sin \beta &= -\sin(-\beta) = -\frac{X_q I_q}{U} \\ \cos \beta &= \cos(-\beta) = \frac{X_d I_d}{U} \end{aligned} \quad (3.17)$$

a dosazením do předposledního výrazu v (3.16) lze odvodit moment ve tvaru

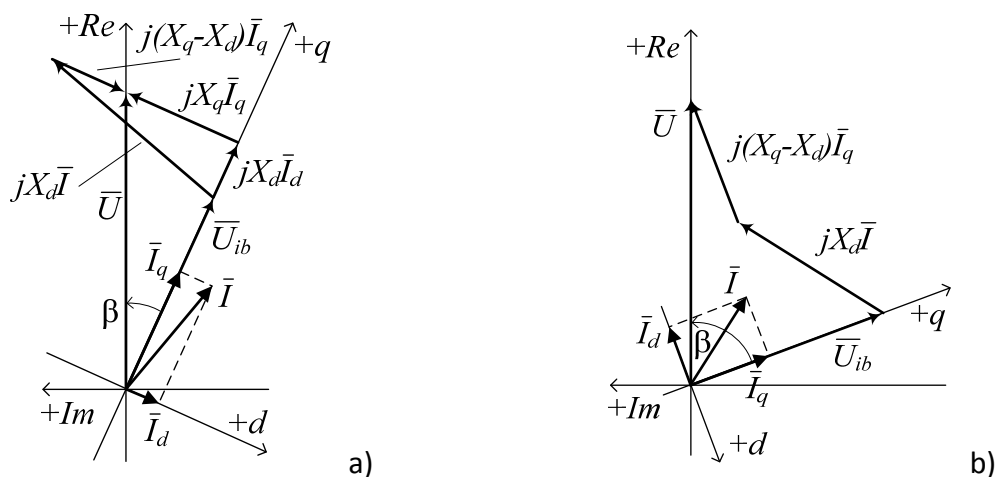
$$M_i = \frac{pm}{\omega} U^2 \frac{(X_d - X_q)}{X_d X_q} \frac{X_q I_q}{U} \frac{X_d I_d}{U} = \frac{pm}{2} (L_d - L_q) I_{dm} I_{qm} \quad (3.18)$$

Tato rovnice odpovídá (3.2) pro $\Psi_b = 0$.

3.3 Synchronní stroj s vyniklými póly / podpovrchovými magnety; $L_d > L_q$ / $L_d > L_q$

Synchronní stroj s vyniklými póly ($L_d > L_q$) je kombinací obou předchozích, proto lze očekávat výsledný moment jako součet momentů stroje s hladkým rotorem a reluktančního stroje. Napěťová rovnice má tvar (viz Obr. 4 a):

$$\bar{U} = \bar{U}_{ib} + jX_d \bar{I}_d + jX_q \bar{I}_q = \bar{U}_{ib} + jX_d \bar{I} + j(X_q - X_d) \bar{I}_q \quad (3.19)$$



Obr. 4: Fázorový diagram buzeného synchronního stroje s $L_d > L_q$ (a) a stroje s vnořenými permanentními magnety $L_d < L_q$ (b) s $R_a = 0$ v motorickém režimu.

Fázor proudu I_q lze vyjádřit jako v případě reluktančního stroje, stejně tak buzené indukované napětí $\bar{U}_{ib} = U_{ib} \angle \beta$. Komplexně sdružená hodnota satorového proudu bude kombinací obou předchozích

$$\bar{I}^* = \frac{U}{X_d} \angle \frac{\pi}{2} - \frac{U_{ib}}{X_d} \angle \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) + (X_q - X_d) \frac{U}{X_d X_q} \sin \beta \angle (-\beta) \quad (3.20)$$

Výsledný moment bude obsahovat jak složku vzniklou rotorovým buzením, tak i reluktanční. Proto musí být vypočten opět moment ekvivalentní svorkovému výkonu, který je pro $R_a = 0$ roven momentu vnitřnímu:

$$\begin{aligned} M_e = M_i &= \frac{pm}{\omega} \Re \left\{ \frac{U^2}{X_d} \angle \frac{\pi}{2} - \frac{U U_{ib}}{X_d} \angle \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) + (X_q - X_d) \frac{U^2}{X_d X_q} \sin \beta \angle (-\beta) \right\} = \\ &= \frac{pm}{\omega} \left[\frac{U^2}{X_d} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{U U_{ib}}{X_d} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) + (X_q - X_d) \frac{U^2}{X_d X_q} \sin \beta \cos(-\beta) \right] = \\ &= \frac{pm}{\omega} U \left[\frac{U_{ib}}{X_d} \sin(-\beta) + \frac{U}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin(-2\beta) \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

Druhá možnost odvození tohoto vztahu založená čistě na geometrických vztazích fázorového diagramu stroje v generátorickém chodu je popsána v [2]. Obdržené výsledky jsou identické. Rovnici lze rozdělit na stroj s hladkým rotorem a stroj reluktanční, tudíž i proudová rovnice bude identická s (3.2).

3.3.1 Stroj s podpovrchovými magnety

K po dlouhou dobu jediným možností uspořádání stroje buď s hladkým rotorem ($L_d = L_q$) nebo vyniklými póly ($L_d > L_q$) přibyla s rozmachem permanentních magnetů možnost třetí. Při vložení permanentních magnetů pod povrch rotoru je cesta hlavního toku kolmá na aktivní plochu magnetu. Ten se však z hlediska vnějšího pole chová jako paramagnetikum s relativní permeabilitou blízkou jedné, a tak je vnější pole v ose d zeslabováno, tudíž $L_d < L_q$.

Fázorový diagram takového stroje je zobrazen na Obr. 4 b). Napěťová rovnice odpovídá (3.19), výpočet příčné složky proudu je shodný jako u stroje s $L_d > L_q$, tudíž i výpočet momentu bude naprosto totožný. Rovnice (3.2) i (3.21) jsou tak platné pro oba druhy vyniklosti.

4 Momentové rovnice při uvažování odporu vinutí R_a

Při uvažování odporu vinutí je nutné na stroj nazírat pomocí plného náhradního schématu, viz Obr. 1. Nedojde pouze k úbytku napětí na odporu, ale také dojde k natočení celého fázorového diagramu a výsledné velikosti odporu.

4.1 Stroj s hladkým rotorem / povrchovými magnety; $L_d = L_q$

Stroj s povrchovými magnety a uvažovaným odporem vinutí lze popsat napěťovou rovnicí

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \bar{U}_{ib} + \bar{Z}_d \bar{I} = \bar{U}_{ib} + (R_a + jX_d) \bar{I}_d + (R_a + jX_d) \bar{I}_q, \\ \bar{Z}_d &= R_a + jX_d = Z_d \angle \left(\frac{\pi}{2} - \rho \right)\end{aligned}\quad (4.1)$$

dle Obr. 5. Tu lze dále upravit dle dříve uvedených vztahů pro fázory svorkového a indukovaného napětí

$$U = U_{ib} \angle \beta + Z_d \angle \left(\frac{\pi}{2} - \rho \right) \bar{I} \quad (4.2)$$

a fázor statorového proudu a jeho komplexně sdružená hodnota jsou

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \frac{U}{Z_d} \angle \left(\rho - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{U_{ib}}{Z_d} \angle \left(\beta + \rho - \frac{\pi}{2} \right) \\ \bar{I}^* &= \frac{U}{Z_d} \angle \left(\frac{\pi}{2} - \rho \right) - \frac{U_{ib}}{Z_d} \angle \left(\frac{\pi}{2} - \beta - \rho \right)\end{aligned}\quad (4.3)$$

Vnitřní moment stroje je potom

$$\begin{aligned}M_i &= \frac{pm}{\omega} \Re\{\bar{U}_{ib} \bar{I}^*\} = \frac{pm}{\omega} \Re\left\{U_{ib} \angle \beta \cdot \left[\frac{U}{Z_d} \angle \left(\frac{\pi}{2} - \rho \right) - \frac{U_{ib}}{Z_d} \angle \left(\frac{\pi}{2} - \beta - \rho \right) \right]\right\} = \\ &= \frac{pm}{\omega} \Re\left\{ \frac{UU_{ib}}{Z_d} \angle \left(\beta - \rho + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{U_{ib}^2}{Z_d} \angle \left(\frac{\pi}{2} - \rho \right) \right\} = \\ &= \frac{pm}{\omega} \frac{U_{ib}}{Z_d} [U \sin(\rho - \beta) - U_{ib} \sin \rho]\end{aligned}\quad (4.4)$$

Odvození této rovnice bylo provedeno v [1] i [2] a obdobně bude odvozen také moment u zbývajících uspořádání stroje. Je zde již patrná důležitost orientace zátěžného úhlu pro motorický a generátorický režim.

Pro úpravu do proudové rovnice pro výpočet momentu bude použit vzorec pro sinus rozdílu dvou argumentů:

$$\sin(\rho - \beta) = \sin \rho \cos \beta - \cos \rho \sin \beta, \quad (4.5)$$

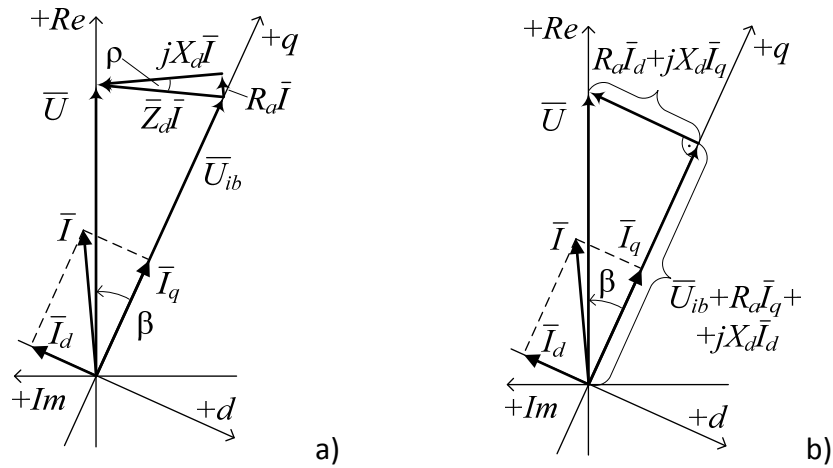
kde sinus a kosinus úhlu ρ je možné získat z impedance stroje na Obr. 5 a) a sinus a kosinus úhlu β z fázorového diagramu ve složkovém tvaru na Obr. 5 b):

$$\begin{aligned}
\sin \rho &= \frac{R_a}{Z_d} \\
\cos \rho &= \frac{X_d}{Z_d} \\
\sin \beta &= \frac{R_a I_d - X_d I_q}{U} \\
\cos \beta &= \frac{U_{ib} + R_a I_q + X_d I_d}{U}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Dosazením do (4.5) a (4.4) získáme

$$\begin{aligned}
M_i &= \frac{pm}{\omega} \frac{U_{ib}}{Z_d} \left[U \left(\frac{R_a U_{ib} + R_a I_q + X_d I_d}{Z_d U} - \frac{X_d R_a I_d - X_d I_q}{Z_d U} \right) - U_{ib} \frac{R_a}{Z_d} \right] = \\
&= \frac{pm}{\omega} \frac{U_{ib}}{Z_d^2} [R_a U_{ib} + R_a^2 I_q + R_a X_d I_d - X_d R_a I_d + X_d^2 I_q - R_a U_{ib}] = \\
&= \frac{pm}{\omega} \frac{U_{ib}}{Z_d^2} (R_a^2 I_q + X_d^2 I_q) = \frac{pm}{2} \Psi_b I_{qm}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Tím bylo dokázáno, že rovnice pro výpočet momentu používaná v elektrických pohonech je univerzálně použitelná i pro malé stroje s nezanedbatelnou velikostí elektrického odporu vinutí; zatím pouze pro stroj s hladkým rotorem.



Obr. 5: Fázorový diagram buzeného synchronního stroje s $L_d = L_q$ včetně uvažování odporu vinutí v motorickém režimu pomocí celkového proudu (a) a pomocí jednotlivých složek proudu (b).

4.2 Synchronní reluktanční stroj; $L_d > L_q$

Obdobně jako u stroje s povrchoвыми magnety lze napětovou rovnici s uvažováním odporu vinutí vyjádřit dvěma způsoby:

$$\begin{aligned}
\bar{U} &= \bar{Z}_d \bar{I} + j(X_q - X_d) \bar{I}_q = (R_a + jX_d) \bar{I}_d + (R_a + jX_q) \bar{I}_q, \\
\bar{Z}_d &= R_a + jX_d = Z_d \angle \left(\frac{\pi}{2} - \rho \right)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Tu lze opět upravit dle dříve zmíněných vztahů

$$U = Z_d \angle \left(\frac{\pi}{2} - \rho \right) \bar{I} + (X_q - X_d) I_q \angle \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) \quad (4.9)$$

Dle Obr. 6 b) lze sinus a kosinus zátěžného úhlu vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{R_a I_d - X_q I_q}{U} \\ \cos \beta &= \frac{R_a I_q + X_d I_d}{U} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Z této soustavy rovnic lze vyjádřit velikost podélné a příčné složky proudu jako

$$\begin{aligned} I_d &= U \frac{R_a \sin \beta + X_q \cos \beta}{R_a^2 + X_d X_q} \\ I_q &= U \frac{R_a \cos \beta - X_d \sin \beta}{R_a^2 + X_d X_q} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dosazením do (4.9) a úpravou je získán vztah pro výpočet fázoru proudu a jeho komplexně sdružené hodnoty

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{U}{Z_d} \angle \left(\rho - \frac{\pi}{2} \right) - U \frac{(X_q - X_d) R_a \cos \beta - X_d \sin \beta}{Z_d (R_a^2 + X_d X_q)} \angle (\beta + \rho) \\ \bar{I}^* &= \frac{U}{Z_d} \angle \left(\frac{\pi}{2} - \rho \right) - U \frac{(X_q - X_d) R_a \cos \beta - X_d \sin \beta}{Z_d (R_a^2 + X_d X_q)} \angle (-\beta - \rho) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Opět bude vypočten moment úměrný výkonu na svorkách stroje M_e , který se však již nerovná momentu vnitřnímu:

$$\begin{aligned} M_e &= \frac{pm}{\omega} \Re \{ \bar{U} \bar{I}^* \} = \\ &= \frac{pm}{\omega} \Re \left\{ \frac{U^2}{Z_d} \angle \left(\frac{\pi}{2} - \rho \right) + \frac{U^2 (X_q - X_d)}{Z_d (R_a^2 + X_d X_q)} (X_d \sin \beta - R_a \cos \beta) \angle (-\beta - \rho) \right\} = \\ &= \frac{pm}{\omega} \frac{U^2}{Z_d} \left[\sin \rho + \frac{(X_d - X_q)}{R_a^2 + X_d X_q} (X_d \sin(-\beta) + R_a \cos(-\beta)) \cos(-\beta - \rho) \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Kosinus rozdílu dvou argumentů je roven:

$$\cos(-\beta - \rho) = \cos(-\beta) \cos \rho + \sin(-\beta) \sin \rho \quad (4.14)$$

a druhou část součinu v (4.13) lze upravit

$$\begin{aligned} &[X_d \sin(-\beta) + R_a \cos(-\beta)] \cos(-\beta - \rho) = \\ &= [X_d \sin(-\beta) + R_a \cos(-\beta)] \cdot [\cos(-\beta) \cos \rho + \sin(-\beta) \sin \rho] = \\ &= X_d \sin(-\beta) \cos(-\beta) \frac{X_d}{Z_d} + R_a \cos^2(-\beta) \frac{X_d}{Z_d} + X_d \sin^2(-\beta) \frac{R_a}{Z_d} \\ &\quad + R_a \cos(-\beta) \sin(-\beta) \frac{R_a}{Z_d} = \frac{R_a X_d}{Z_d} + \frac{Z_d}{2} \sin(-2\beta) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Momentová rovnice tak bude mít tvar

$$M_e = \frac{pm}{\omega} \frac{U^2}{Z_d} \left[\sin \rho + \frac{(X_d - X_q)}{R_a^2 + X_d X_q} \left(\frac{Z_d}{2} \sin(-2\beta) + \frac{R_a X_d}{Z_d} \right) \right] \quad (4.16)$$

Vznikla tak mnohem komplexnější rovnice oproti stroji s hladkým rotorem (4.4). Vnitřní moment lze pak určit jako moment vnější minus moment úměrný Joulovým ztrátám ve vinutí

$$M_i = M_e - \frac{pm}{\omega} R_a I^2, \quad (4.17)$$

$$I^2 = I_d^2 + I_q^2,$$

kde proudy I_d a I_q jsou určeny dle (4.11). Pro odvození proudové složkové rovnice bude použita rovnice (4.13), avšak bez dosazení za proud I_q z (4.11):

$$M_e = \frac{pm}{\omega Z_d} \left[\frac{U^2 R_a}{Z_d} + U(X_d - X_q)I_q \cos(-\beta - \rho) \right] \quad (4.18)$$

Před dosazením lze rovnici (4.14) dále upravit

$$\cos(-\beta) \cos \rho + \sin(-\beta) \sin \rho = \frac{R_a I_q + X_d I_d}{U} \frac{X_d}{Z_d} - \frac{R_a I_d - X_q I_q}{U} \frac{R_a}{Z_d} \quad (4.19)$$

Napětí lze z fázorového diagramu na Obr. 6 b) vyjádřit jako

$$U^2 = (R_a I_d - X_q I_q)^2 + (R_a I_q + X_d I_d)^2 \quad (4.20)$$

Dosazením (4.19) a (4.20), roznásobením a dalšími úpravami lze dospět k závěrečným vztahům:

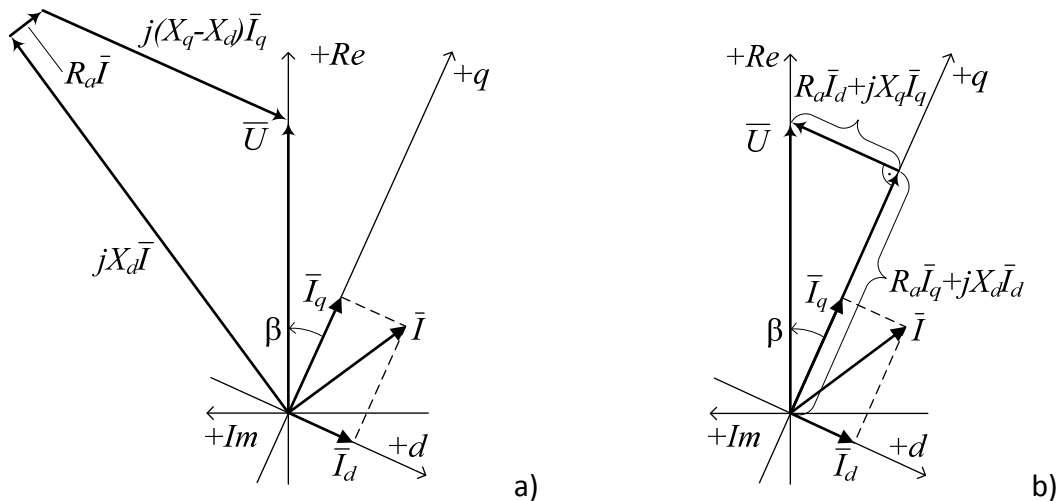
$$M_e = \frac{pm}{\omega Z_d^2} [R_a^3 I^2 + R_a X_d^2 I^2 + (X_d - X_q) I_d I_q (X_d^2 + R_a^2)] =$$

$$= \frac{pm}{\omega} [R_a I^2 + (X_d - X_q) I_d I_q] = \frac{pm}{2} \left[(L_d - L_q) I_{dm} I_{qm} + \frac{R_a}{\omega} I_m^2 \right] \quad (4.21)$$

Snadno lze již odvodit vnitřní moment stroje dle (4.17) jako

$$M_i = \frac{pm}{2} (L_d - L_q) I_{dm} I_{qm} \quad (4.22)$$

Je patrné, že ani u reluktančního stroje není proudový vzorec pro výpočet momentu nijak pozměněn velikostí odporu vinutí.

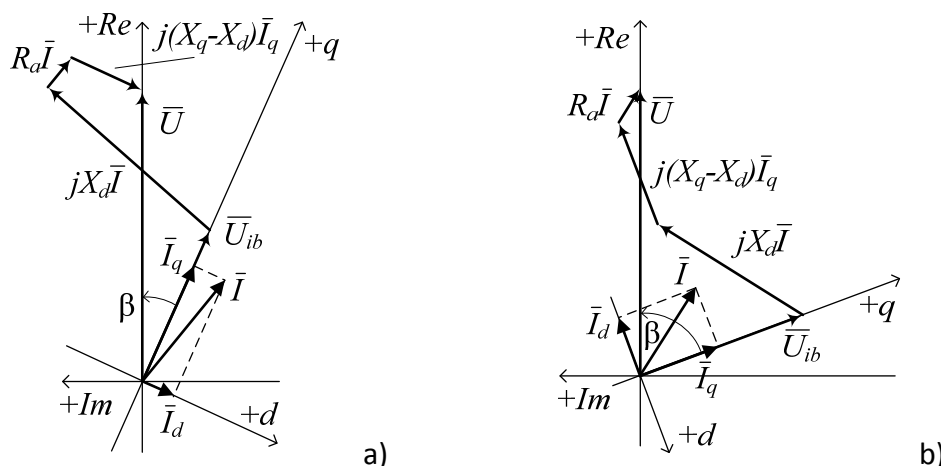


Obr. 6: Fázorový diagram reluktančního stroje s $L_d > L_q$ včetně uvažování odporu vinutí v motorickém režimu pomocí celkového proudu (a) a pomocí jednotlivých složek proudu (b).

4.3 Synchronní stroj s vyniklými póly / podpovrchovými magnety; $L_d > L_q$ / $L_d < L_q$

Napěťovou rovnici s uvažováním odporu vinutí lze vyjádřit dle Obr. 7 jako

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \bar{U}_{ib} + \bar{Z}_d \bar{I} + j(X_q - X_d) \bar{I}_q, \\ \bar{Z}_d &= R_a + jX_d = Z_d \angle \left(\frac{\pi}{2} - \rho \right)\end{aligned}\quad (4.23)$$



Obr. 7: Fázorový diagram buzeného synchronního stroje s $L_d > L_q$ (a) a $L_d < L_q$ (b) včetně uvažování odporu vinutí $R_a = 0$ v motorickém režimu.

Tu lze opět upravit dle dříve zmíněných vztahů

$$U = U_{ib} \angle \beta + Z_d \angle \left(\frac{\pi}{2} - \rho \right) \bar{I} + (X_q - X_d) I_q \angle \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) \quad (4.24)$$

Dle Obr. 7 lze sinus a kosinus zátěžného úhlu vyjádřit jako

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \frac{R_a I_d - X_q I_q}{U} \\ \cos \beta &= \frac{U_{ib} + R_a I_q + X_d I_d}{U}\end{aligned}\quad (4.25)$$

Z této soustavy rovnic lze vyjádřit velikost podélné a příčné složky proudu jako

$$\begin{aligned}I_d &= \frac{U(R_a \sin \beta + X_q \cos \beta) - X_q U_{ib}}{R_a^2 + X_d X_q} \\ I_q &= \frac{U(R_a \cos \beta - X_d \sin \beta) - R_a U_{ib}}{R_a^2 + X_d X_q}\end{aligned}\quad (4.26)$$

Dosazením do (4.24) a úpravou je získán vztah pro výpočet fázoru proudu a jeho komplexně sdružené hodnoty

$$\begin{aligned}
\bar{I} &= \frac{U}{Z_d} \angle \left(\rho - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{U_{ib}}{Z_d} \angle \left(\beta + \rho - \frac{\pi}{2} \right) \\
&\quad - \frac{(X_q - X_d) U (R_a \cos \beta - X_d \sin \beta) - R_a U_{ib}}{Z_d (R_a^2 + X_d X_q)} \angle (\beta + \rho) \\
\bar{I}^* &= \frac{U}{Z_d} \angle \left(\frac{\pi}{2} - \rho \right) - \frac{U_{ib}}{Z_d} \angle \left(\frac{\pi}{2} - \beta - \rho \right) \\
&\quad - \frac{(X_q - X_d) U (R_a \cos \beta - X_d \sin \beta) - R_a U_{ib}}{Z_d (R_a^2 + X_d X_q)} \angle (-\beta - \rho)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Moment úměrný výkonu na svorkách stroje M_e je roven:

$$\begin{aligned}
M_e &= \frac{pm}{\omega} \Re\{\bar{U}\bar{I}^*\} = \frac{pm}{\omega} \Re\{U\bar{I}^*\} = \\
&= \frac{pm}{\omega} \Re \left\{ \frac{U^2}{Z_d} \angle \left(\frac{\pi}{2} - \rho \right) - \frac{UU_{ib}}{Z_d} \angle \left(\frac{\pi}{2} - \beta - \rho \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{U}{Z_d} (X_q - X_d) \frac{U(R_a \cos \beta - X_d \sin \beta) - R_a U_{ib}}{R_a^2 + X_d X_q} \angle (-\beta - \rho) \right\} = \\
&= \frac{pm}{\omega} \frac{U}{Z_d} \left[U \sin \rho - U_{ib} \sin(\beta + \rho) \right. \\
&\quad \left. - (X_q - X_d) \frac{U(R_a \cos \beta - X_d \sin \beta) - R_a U_{ib}}{R_a^2 + X_d X_q} \cos(\beta + \rho) \right]
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Tento vztah lze upravit obdobně jako předchozí do tvaru

$$\begin{aligned}
M_e &= \frac{pm}{\omega} \frac{U}{Z_d} \left[U \sin \rho - U_{ib} (\sin \beta \cos \rho + \cos \beta \sin \rho) \right. \\
&\quad \left. + \frac{X_d - X_q}{R_a^2 + X_d X_q} \left(U \left(\frac{Z_d}{2} \sin(-2\beta) + \frac{R_a X_d}{Z_d} \right) + R_a U_{ib} (\sin \beta \sin \rho - \cos \beta \cos \rho) \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Členy týkající se buzeného indukovaného napětí lze upravit jako

$$\begin{aligned}
&-U_{ib} (\sin \beta \cos \rho + \cos \beta \sin \rho) + \frac{X_d - X_q}{R_a^2 + X_d X_q} R_a U_{ib} (\sin \beta \sin \rho - \cos \beta \cos \rho) = \\
&= \frac{Z_d U_{ib}}{R_a^2 + X_d X_q} (X_q \sin(-\beta) - R_a \cos(-\beta))
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Výsledná momentová rovnice má tvar

$$M_e = \frac{pm}{\omega} \frac{U}{Z_d} \left[U \sin \rho + \frac{1}{R_a^2 + X_d X_q} \left(U (X_d - X_q) \left(\frac{Z_d}{2} \sin(-2\beta) + \frac{R_a X_d}{Z_d} \right) + U_{ib} Z_d (X_q \sin(-\beta) - R_a \cos(-\beta)) \right) \right] \tag{4.31}$$

Rovnice je opět mnohem komplexnější a nelze jako u stroje s hladkým rotorem oddělit složky vzniklé zahrnutím odporu stroje. Vnitřní moment lze pak opět určit jako moment vnější minus moment úměrný Joulovým ztrátám ve vinutí

$$\begin{aligned}
M_i &= M_e - \frac{pm}{\omega} R_a I^2, \\
I^2 &= I_d^2 + I_q^2,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

kde proudy I_d a I_q jsou určeny dle (4.26).

Pro odvození proudové složkové rovnice bude použita rovnice (4.28), avšak bez dosazení za proud I_q z (4.26):

$$M_e = \frac{pm}{\omega Z_d} \left[\frac{U^2 R_a}{Z_d} - UU_{ib} \sin(\beta + \rho) + U(X_d - X_q)I_q \cos(\beta + \rho) \right] \quad (4.33)$$

Rovnice (4.33) bude upravena pomocí součtových vzorců funkcí sinus a kosinus a napětí je vyjádřeno z fázorového diagramu jako

$$U^2 = (R_a I_d - X_q I_q)^2 + (U_{ib} + R_a I_q + X_d I_d)^2 \quad (4.34)$$

Úpravami lze odvodit výsledný proudový vztah svorkového momentu:

$$M_e = \frac{pm}{2} \left[\Psi_b I_{qm} + (L_d - L_q) I_{dm} I_{qm} + \frac{R_a}{\omega} I_m^2 \right] \quad (4.35)$$

a proudová rovnice vnitřního momentu stroje opět není nijak ovlivněna velikostí odporu vinutí:

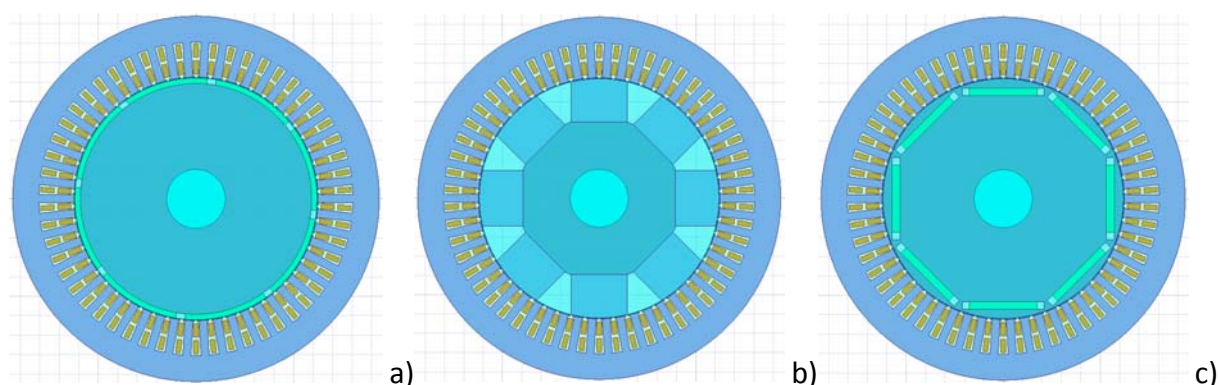
$$M_i = \frac{pm}{2} [\Psi_b I_{qm} + (L_d - L_q) I_{dm} I_{qm}] \quad (4.36)$$

5 Momentové charakteristiky

K vyhodnocení vlivu odporu na moment stroje je vhodné vykreslit momentové charakteristiky $M = f(\beta)$ všech typů strojů pro různou velikost odporu vinutí. Jako referenční stroj byl zvolen synchronní motor s povrchovými permanentními magnety (viz Obr. 8 a)), jehož parametry jsou shrnuty v prvním sloupci Tab. 1.

Tab. 1: Parametry analyzovaných strojů

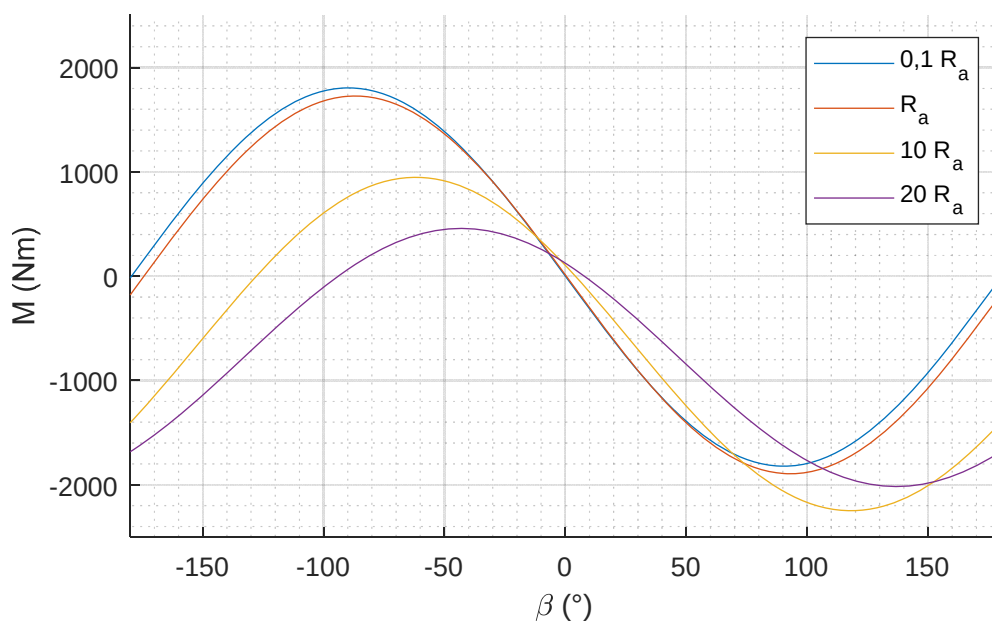
Typ rotoru	Povrchové magnety ($L_d = L_q$)	Reluktanční ($L_d > L_q$, $U_{ib} = 0$)	Podpovrchové magnety ($L_d < L_q$)
Počet fází m	3		
Počet pólů p	4		
Synchronní rychlost n_s (ot/min)	800		
Fázové napětí U (V)	245		
Buizené indukované napětí U_{ib} (V)	211,2	0	173,9
Podélná indukčnost L_d (mH)	3,05	13,64	5,14
Příčná indukčnost L_q (mH)	3,05	6,46	13,44
Odpor vinutí R_a (Ω)	0,055		



Obr. 8: Analyzovaný stroj s povrchovými magnety (a), reluktanční stroj (b) a stroj s podpovrchovými magnety (c)

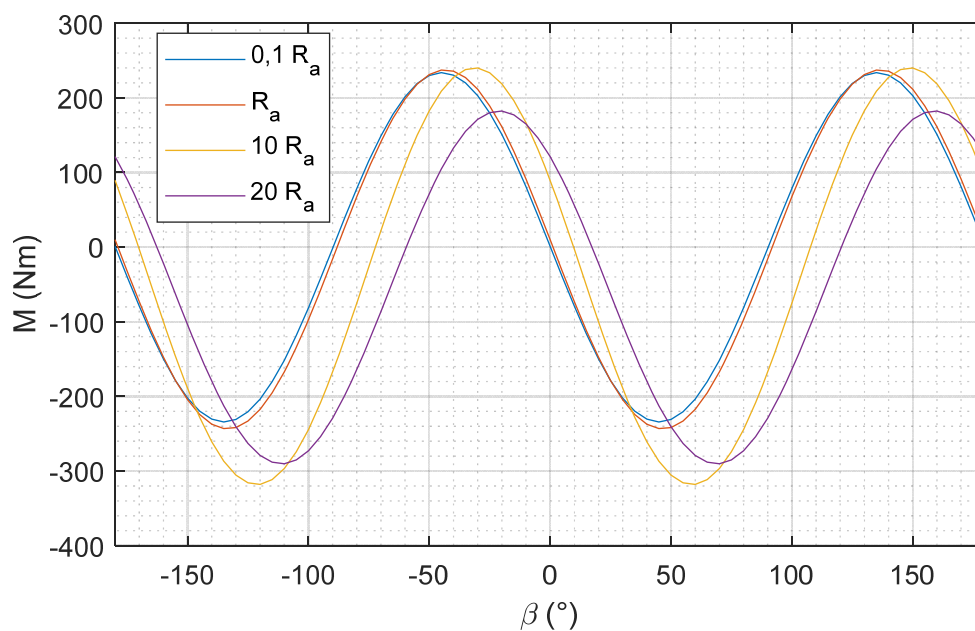
Pro výpočet momentu všech tří druhů strojů byl použit obecný vzorec (4.31) a (4.32). Ten lze úpravami převést na konkrétní vztahy (4.4) a (4.16) popisující stroj s povrchovými magnety a reluktanční synchronní stroj. Kromě vypočteného odporu vinutí budou použity ještě velikosti $0,1R_a$, $10R_a$ a $20R_a$, aby bylo možné lépe zobrazit vliv odporu na tvar momentové

charakteristiky. Výsledné momentové charakteristiky stroje s povrchovými magnety jsou zobrazeny na Obr. 9.

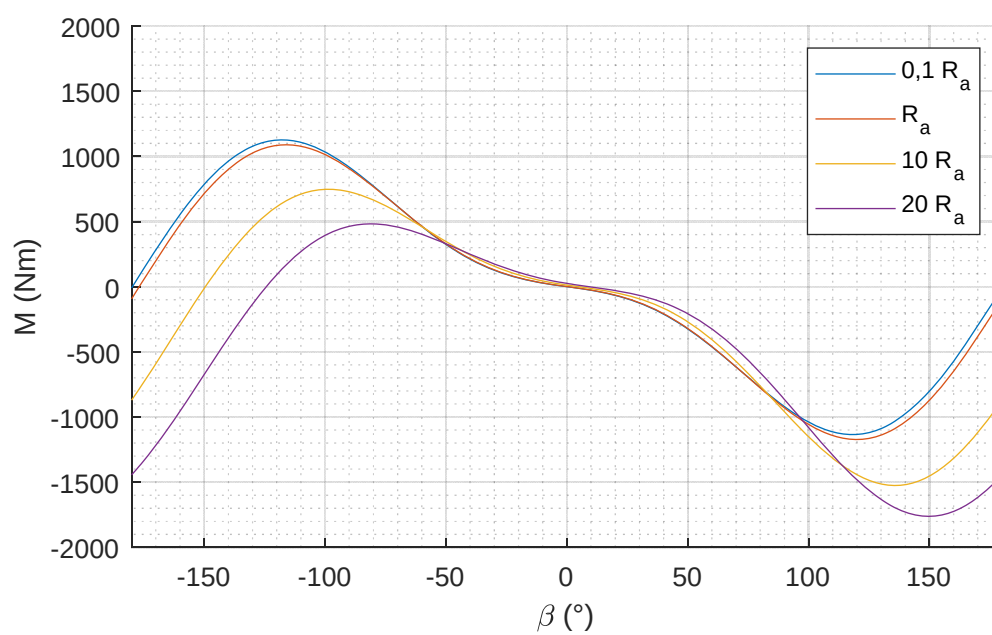


Obr. 9: Momentová charakteristika stroje s povrchovými magnety

Reluktanční stroj a stroj s podpovrchovými magnety jsou odvozeny pouhou náhradou rotoru za jiný bez jakékoliv snahy o dosažení co největšího momentu. Pro oba stroje budou opět kromě vypočteného odporu vinutí použity odpory o velikosti $0,1R_a$, $10R_a$ a $20R_a$. Výsledné průběhy momentů jsou zobrazeny na Obr. 10 a Obr. 11.



Obr. 10: Momentová charakteristika reluktančního stroje



Obr. 11: Momentová charakteristika stroje s podpovrchovými magnety

6 Porovnání výpočtů momentu

Pro potvrzení správnosti odvozených vztahů bude pokaždé pro jeden pracovní bod vypočten moment pomocí odvozených rovnic, který se rovná momentu vypočteného z proudového vztahu (3.2) a pomocí metody konečných prvků (MKP). Pro eliminaci ostatních vlivů bude vždy pro daný pracovní bod určena podélná i příčná složka indukčnosti pomocí MKP a bude použita pro analytický výpočet. Zátěžný úhel bude vždy pro danou konfiguraci konstantní a mění se pouze velikost odporu R_a . Kromě velikosti momentu bude také porovnávána efektivní hodnota proudu a jeho podélná a příčná složka. K získání výsledků pomocí MKP byla použita 2D transientní analýza v software ANSYS Electronics Desktop (verze 2019 R3) [3].

Tab. 2: Stroj s povrchovými magnety

	0,1 R_a		R_a		10 R_a		20 R_a	
	analytický	MKP	analytický	MKP	analytický	MKP	analytický	MKP
β (°)	-29,34							
L_d (mH)	2,91		2,89		3,14		3,18	
L_q (mH)	2,75		2,90		3,07		3,18	
I_d (A)	1,7	-18,1	-4,5	12,1	-44,9	-50,6	-55,4	-38,4
I_q (A)	123,2	216,7	123,6	145,5	90,7	99,0	55,9	74,2
I (A)	123,3	217,5	123,7	146,0	101,2	111,2	78,7	83,6
M_i (Nm)	932	1398	935	996	686	732	423	423
δM_i (%)	-33,3		-6,1		-6,3		+0,0	

Tab. 3: Reluktanční stroj

	0,1 R_a		R_a		10 R_a		20 R_a	
	analytický	MKP	analytický	MKP	analytický	MKP	analytický	MKP
β (°)	-25						-10	
L_d (mH)	7,61		7,78		9,43		10,35	
L_q (mH)	4,81		4,83		4,98		5,41	
I_d (A)	85,4	100,9	82,4	98,3	55,9	66,8	52,0	54,2
I_q (A)	62,7	96,0	64,9	98,7	78,3	105,0	53,5	70,1
I (A)	106,0	139,2	104,9	139,3	96,2	124,4	74,6	88,7
M_i (Nm)	179,8	339,4	189,3	336,3	233,6	246,8	164,9	188,5
δM_i (%)	-47,0		-43,7		-5,3		-12,5	

Pro reluktanční stroj s odporem $20R_a$ musel být zmenšen zátěžný úhel na -10° , protože by stroj přešel do labilní oblasti (viz Obr. 10).

Tab. 4: Stroj s podpovrchovými magnety

	0,1 R_a		R_a		10 R_a		20 R_a	
	analyticky	MKP	analyticky	MKP	analyticky	MKP	analyticky	MKP
β (°)	-74,28							
L_d (mH)	3,70		3,74		3,83		3,87	
L_q (mH)	4,69		4,95		7,48		9,65	
I_d (A)	-92,5	-114,5	-97,1	-123,3	-117,9	-151,5	-116,2	-138,2
I_q (A)	149,9	175,4	139,0	165,6	68,4	84,2	33,6	38,3
I (A)	176,1	209,5	169,6	206,4	136,2	173,2	120,9	143,4
M_i (Nm)	1131	1332	1094	1312	794	877	488	452
δM_i (%)	-15,1		-16,6		-9,5		+8,0	

Pohledem na tabulky je patrný jednoznačný jev. U všech strojů a pro všechny velikosti odporů jsou pro daný zátěžný úhel a dané poměry indukčností proudy vypočtené pomocí MKP větší, než proudy vypočtené analyticky. To by mohlo u strojů s permanentními magnety značit pokles indukovaného napětí vlivem dodatečného sycení stroje a poklesem spřaženého toku vybuzeného magnety oproti stavu naprázdno. To však nevysvětluje zároveň nárůst momentu v MKP výpočtu a hlavně nelze toto vysvětlení použít pro stroj reluktanční.

Momenty reluktančního stroje obdržené pomocí metody konečných prvků jsou pro každou hodnotu odporu větší, než je maximální dosažitelná hodnota dle Obr. 10. Prakticky to znamená, že indukčnosti, které jsou vypočtené pomocí metody konečných prvků, nedovolí při dané velikosti napájecího napětí a rychlosti stroje vinutím protlačit takový proud, aby bylo možné vytvořit takto velký moment. Z toho tedy vyplývá, že indukčnosti vypočtené v použitém software nemohou nijak souviset s provozními parametry stroje.

Druhý parametr související s indukčností stroje je spřažený tok, který je jako výstupní veličina MKP výpočtů opět dostupný rozložený do podélné a příčné složky Ψ_d a Ψ_q . Dle Obr. 3 b) lze odvodit platnost mezi velikostí indukovaného napětí, spřaženého toku a indukčností jako

$$\begin{aligned} U_{id} &= -\omega \Psi_q = -\omega L_q I_q \\ U_{iq} &= \omega \Psi_d = \omega L_d I_d \end{aligned} \quad (6.1)$$

Indukované napětí se pak musí při zanedbání odporu vinutí rovnat napětí síťovému v dané ose, což se z MKP výpočtů potvrdilo. Pomocí rovnice (6.1) lze tak odvodit podélnou a příčnou indukčnost na základě definice spřaženého toku, která z hlediska náhradního schématu a fázorového diagramu odpovídá realitě. Z této indukčnosti je pak opět dopočítán proud a moment a výsledky jsou porovnány s MKP a shrnuty v Tab. 5. V Tab. 6 jsou pak porovnání indukčnosti získané jako výstup ze software ANSYS a dopočtené ze spřaženého toku určeného pomocí stejného software.

Tab. 5: Nové parametry reluktančního stroje získané ze spřaženého toku

	0,1 R_a		R_a		10 R_a		20 R_a	
	analyticky	MKP	analyticky	MKP	analyticky	MKP	analyticky	MKP
β (°)	-25						-10	
Ψ_d (Wb)	1,350		1,319		0,992		1,003	
Ψ_q (Wb)	0,678		0,707		0,891		0,660	
L_d (mH)	6,31		6,32		7,01		8,72	
L_q (mH)	3,33		3,38		4,00		4,44	
I_d (A)	102,6	100,9	100,2	98,3	69,4	66,8	56,2	54,2
I_q (A)	89,6	96,0	92,6	98,7	102,1	105,0	68,0	70,1
I (A)	136,2	139,2	136,5	139,3	123,5	124,4	88,2	88,7
M_i (Nm)	328,6	339,4	328,1	336,3	255,7	246,8	196,3	188,5
δM_i (%)	-3,2		-2,4		+3,6		+4,1	

Tab. 6: Porovnání indukčností získaných přímo pomocí ANSYS Electronics Desktop a dopočtených na základě spřaženého toku a proudu

	0,1 R_a		R_a		10 R_a		20 R_a	
	Přímo	Z toku	Přímo	Z toku	Přímo	Z toku	Přímo	Z toku
L_d (mH)	7,61	6,31	7,78	6,32	9,43	7,01	10,35	8,72
L_q (mH)	4,81	3,33	4,83	3,38	4,98	4,00	5,41	4,44
δL_d (%)	+20,6		+23,1		+34,5		+18,1	
δL_q (%)	+44,4		+42,9		+24,5		+21,8	

7 Závěr

Tato výzkumná zpráva je rozdělena do dvou základních částí. První část se zabývá odvozením momentových rovnic všech synchronních strojů (s hladkým rotorem/povrchovými magnety, s vyniklými póly/podpovrchovými magnety a strojů reluktančních) včetně uvažování odporu vinutí v náhradním schématu. Jsou odvozeny všechny napěťové rovnice (pro konstantní napětí vyjádřené pomocí zátěžného úhlu β) a z nich zpětně proudové rovnice. Proudový tvar momentových rovnic se při uvažování odporu vinutí nezmění, je tak univerzálně použitelný ve tvaru

$$M_i = \frac{pm}{2} [\Psi_b I_{qm} + (L_d - L_q) I_{dm} I_{qm}],$$

což je obecně známý vztah pro výpočet vnitřního moment M_i . Napěťový tvar rovnice je odporem ovlivněn a jeho univerzální tvar je

$$M_i = M_e - \frac{pm}{\omega} R_a I^2,$$

kde vnější moment stroje M_e je určen jako

$$M_e = \frac{pm}{\omega} \frac{U}{Z_d} \left[U \sin \rho + \frac{1}{R_a^2 + X_d X_q} \left(U(X_d - X_q) \left(\frac{Z_d}{2} \sin(-2\beta) + \frac{R_a X_d}{Z_d} \right) + U_{ib} Z_d (X_q \sin(-\beta) - R_a \cos(-\beta)) \right) \right],$$

proud vinutím je

$$I^2 = I_d^2 + I_q^2$$

a jednotlivé složky proudu se určí jako

$$I_d = \frac{U(R_a \sin \beta + X_q \cos \beta) - X_q U_{ib}}{R_a^2 + X_d X_q}$$

$$I_q = \frac{U(R_a \cos \beta - X_d \sin \beta) - R_a U_{ib}}{R_a^2 + X_d X_q}$$

Tím byl odvozen univerzální tvar pro výpočet momentu stroje vhodný pro použití při jeho návrhu, kdy je známé napájecí napětí a určují se parametry náhradního schématu.

Druhá část zprávy je věnována porovnání charakteristik strojů pro různé hodnoty odporu vinutí. Tyto výpočty jsou následně porovnány s výsledky získanými metodou konečných prvků v software ANSYS Electronics Desktop (verze 2019 R3). Záměrem tohoto porovnání bylo ověření analytických výpočtů pro různé hodnoty odporu vinutí. Proto byly parametry náhradního schématu (spřažený tok a indukované napětí ze stavu naprázdno a podélná a příčná indukčnost v každém bodě) určeny pomocí MKP a použity v analytickém výpočtu. Tím bylo zamezeno vzniku chyby rozdílnou velikostí parametrů stroje.

Proudy strojem i jeho moment určené pomocí MKP vyšly pro každé uspořádání větší, než určené analyticky. Nejvýrazněji se tento efekt projevil při absenci buzení, tedy pro stroj reluktanční. Tam vypočtené hodnoty momentu překonaly maximální dosažitelný moment stroje. Při podrobnější analýze bylo zjištěno, že při použití proudů a indukčností vypočtených pomocí MKP je celkový napěťový úbytek větší, než přiložené napájecí napětí. Tento stav stroje nemůže nastat, hodnota indukčnosti je tedy nepoužitelná. Pro zpětný výpočet indukčnosti je tudíž nutné použít spřažený tok a proud v ose d a q . Pokud jsou takto

odvozené indukčnosti použité v analytických vzorcích, odchylka proudů i momentu je menší než 4 %.

Druhým důležitým závěrem této zprávy je nemožnost důvěřovat indukčnostem dopočtených přímo v ANSYS Electronics Desktop; naopak je pro jejich určení použít spřažený tok. Pro reluktanční stroj je tento dopočet snadný, problém nastává u strojů disponujících buzením na rotoru.

Literatura

- [1] BAŠTA, Jan. Teorie elektrických strojů. 1. vyd. Praha: SNTL, 1956. 544 s.
- [2] BARTOŠ, Václav. Teorie elektrických strojů. 1. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2006. 230 s. ISBN 80-7043-509-7.
- [3] ANSYS Electronics. [online]. [cit. 19.3.2020] Dostupné z: <https://www.ansys.com/products/electronics>

Seznam obrázků

Obr. 1: Náhradní schéma synchronního stroje v ustáleném stavu pro použití v teorii elektrických strojů (a) a pro elektrické pohony (b)	6
Obr. 2: Definice souřadných systémů synchronního stroje	7
Obr. 3: Fázorový diagram buzeného synchronního stroje s $L_d = L_q$ (a) a synchronního reluktančního stroje s $L_d > L_q$ (b) s $R_a = 0$ v motorickém režimu.	8
Obr. 4: Fázorový diagram buzeného synchronního stroje s $L_d > L_q$ (a) a stroje s vnořenými permanentními magnety $L_d < L_q$ (b) s $R_a = 0$ v motorickém režimu.	11
Obr. 5: Fázorový diagram buzeného synchronního stroje s $L_d = L_q$ včetně uvažování odporu vinutí v motorickém režimu pomocí celkového proudu (a) a pomocí jednotlivých složek proudu (b).	13
Obr. 6: Fázorový diagram reluktančního stroje s $L_d > L_q$ včetně uvažování odporu vinutí v motorickém režimu pomocí celkového proudu (a) a pomocí jednotlivých složek proudu (b).	15
Obr. 7: Fázorový diagram buzeného synchronního stroje s $L_d > L_q$ (a) a $L_d < L_q$ (b) včetně uvažování odporu vinutí $R_a = 0$ v motorickém režimu.	16
Obr. 8: Analyzovaný stroj s povrchovými magnety (a), reluktanční stroj (b) a stroj s podpovrchovými magnety (c)	19
Obr. 9: Momentová charakteristika stroje s povrchovými magnety	20
Obr. 10: Momentová charakteristika reluktančního stroje	20
Obr. 11: Momentová charakteristika stroje s podpovrchovými magnety	21

Seznam tabulek

Tab. 1: Parametry analyzovaných strojů	19
Tab. 2: Stroj s povrchovými magnety	22
Tab. 3: Reluktanční stroj	22
Tab. 4: Stroj s podpovrchovými magnety	23
Tab. 5: Nové parametry reluktančního stroje získané ze spřaženého toku	24
Tab. 6: Porovnání indukčností získaných přímo pomocí ANSYS Electronics Desktop a dopočtených na základě spřaženého toku a proudu	24

Historie revizí

Rev.	Kapitola	Popis změny	Datum	Jméno
0	Všechny	Publikování dokumentu	15.11.2010	J.Michalík