Komplexní přehled výpočtu vlivu kroku vícefázových vinutí na drážkový rozptyl

Pracoviště:	RICE
Číslo dokumentu:	22190 – 037 – 2021
Typ zprávy:	Výzkumná zpráva
Řešitelé:	Ing. Jan Laksar, Ph.D.
Vedoucí projektu:	Prof. Ing. Zdeněk Peroutka, Ph.D.
Počet stran:	35
Datum vydání:	9. 7. 2021
Oborové zařazení:	2.2 Electrical engineering, Electronic engineering, Information engineering - Electrical and electronic engineering

Zadavatel / zákazník:

Zpracovatel / dodavatel:
Západočeská univerzita v Plzni
Research and Innovation Centre
for Electrical Engineering
Univerzitní 8
306 14 Plzeň
Kontaktní osoba:
Jan Laksar
tel. 377634474
laksar@fel.zcu.cz

Tento příspěvek vznikl s podporou Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR v rámci projektu OP VVV, Elektrotechnické technologie s vysokým podílem vestavěné inteligence, číslo CZ.02.1.01/0.0/0.0/18_069/0009855 a v rámci projektu SGS-2021-021

Anotace

Tato výzkumná zpráva se zabývá odvozením a přípravou prakticky použitelných vztahů pro výpočet vlivu kroku vinutí na drážkovou indukčnost stroje. Kromě různého počtu fází je diskutován i vliv tvaru proudu a injektáže vyšších harmonických.

Klíčová slova

Rozptylová indukčnost drážky, vícefázové stroje, krok vinutí

Název zprávy v anglickém jazyce / Report title

Complex overview of the calculation of the impact of coil pitch of multiphase windings to the slot leakage inductance

Anotace v anglickém jazyce / Abstract

This research report deals with the derivation and preparation of the practically useful relations to the calculation of the influence of the coil pitch to the slot leakage inductance of the electrical machine. In addition to the different number of phases, the effect of current shape and injection of higher time harmonics is discussed.

Klíčová slova v anglickém jazyce / Keywords

Slot leakage inductance, multiphase machines, winding step

Obsah

1 Úvod

Rozptylová indukčnost drážky je popsána vztahem

$$L_{\sigma d} = 2\mu_0 \frac{\lambda_d}{pq} l_{Fe} N_s^2 \tag{2.1-1}$$

V rámci této zprávy se zaměříme na činitel drážkového rozptylu, který bude pro zjednodušení označován pouze λ. Ten je ovlivněn zejména geometrií drážky, ale nezanedbatelný podíl mají také krok vinutí a počet jeho fází. V literatuře se však běžně uvádí pouze vztahy pro třífázové vinutí, což bylo první motivací pro vznik této výzkumné zprávy. Drážková rozptylová indukčnost zejména zubových vinutí strojů s permanentními magnety bývá často nejvýznamnější složkou indukčnosti; proto je nutné se snažit její výpočet zpřesnit již při analytickém návrhu stroje.

V prvních kapitolách je ukázán výpočet samostatné obdélníkové drážky a pak jsou postupně přidávány vlivy kroku vinutí, výpočet indukčnosti celého vinutí, vliv více fází stroje a v neposlední řadě příklad injektáže vyšších harmonických.

2 Výpočet indukčnosti samostatné drážky

Pro výpočet samotné drážky jsou zavedeny následující předpoklady:

- Je uvažována nejjednodušší geometrie obdélníkové drážky
- Souřadnicový systém vždy začíná (y = 0) u dna analyzované oblasti
- Indukčnost a činitel magnetické vodivosti jsou úzce spjaté pojmy; budou používány obvyklé termíny jako vzájemná indukčnost, i když půjde o výpočet činitele rozptylové indukčnosti vzájemné indukčnosti
- Proud analyzovaným vinutím je vždy v amplitudě (pokud není řečeno jinak) I_m = 1 p.u.

2.1 Obecné určení činitele magnetické vodivosti drážky z energie a spřaženého toku

Základem výpočtu je Ampèrův zákon celkového proudu definovaný obecně jako

$$\oint_c \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}S\,, \tag{2.1-1}$$

který lze pro obdélníkovou drážku a proměnnou intenzitu magnetického pole pouze ve směru osy y upravit do tvaru

$$H(y) \cdot l(y) = J(y) \cdot S(y) \tag{2.1-2}$$

Hustota energie magnetického pole v drážce je

$$w_m = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \tag{2.1-3}$$

a vzhledem k závislosti pouze na směru osy y le možné objemový integrál pro výpočet energie magnetického pole upravit

$$W_m = \int_V w_m \, dV = b l_{Fe} \int_0^h w_m(y) \, dy \tag{2.1-4}$$

Z energetické definice indukčnosti

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \tag{2.1-5}$$

a vztahu mezi indukčností a činitelem magnetické vodivosti λ

$$L = \mu_0 \lambda l_{Fe} \tag{2.1-6}$$

lze určit vztah pro odvození činitele magnetické vodivosti drážky jako

$$\lambda = \frac{L}{\mu_0 l_{Fe}} = \frac{2W_m}{\mu_0 I^2 l_{Fe}}, \tag{2.1-7}$$

do kterého je postupně dosazeno dle oblasti drážky.

Element magnetického toku drážky je možné určit jako

$$d\Phi(y) = B(y) l_{Fe} dy = \mu_0 H(y) l_{Fe} dy \tag{2.1-8}$$

Tok spřažený s vinutím je pak roven integrálu

$$\Psi = N \int_0^\Phi k_\Phi \, d\Phi = N \int_0^h k_\Phi \mu_0 H l_{Fe} dy \tag{2.1-9}$$

Je nutné odlišit, zda se zdroj magnetického pole nachází v počítané oblasti či nikoliv. Pokud ne, nezávisí spřažený tok na konkrétní pozici elementu vinutí a činitel $k_\Phi = 1$. Pokud se však v dané oblasti nachází zdroj magnetického pole ($J \neq 0$), závisí velikost spřaženého toku na poloze uvažovaného elementu vinutí a činitel $k_\Phi = y/h$, kde h je výška dané oblasti drážky.

Z definice indukčnosti

$$L = \frac{\Psi}{I} \tag{2.1-10}$$

lze pak jednoduše dovodit vztah pro činitel magnetické vodivosti drážky

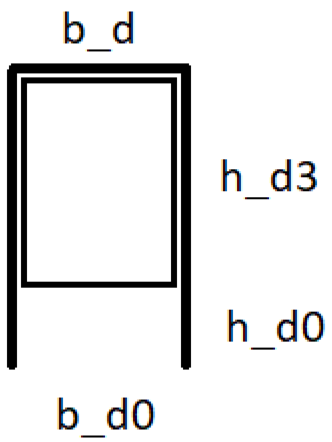
$$\lambda = \frac{L}{\mu_0 l_{Fe}} = \frac{\Psi}{\mu_0 I l_{Fe}} \tag{2.1-11}$$

2.2 Rozptylová indukčnost obdélníkové drážky jednovrstvého vinutí

Na Obr. 2.1 je definována obdélníková drážka s jednovrstvým vinutím a její rozměry. Drážka je nakreslena jako otevřená, nicméně šířka otevření b_{d0} může být obecně odlišná od šířky drážky b_d. Pro výpočet činitele magnetické vodivosti je vždy uvažován 1 závit v drážce $N = 1$ a proudová hustota v oblasti vinutí je definována vztahem

$$I = J h_{d3} b_d \tag{2.2-1}$$

Drážka jednovrstvého vinutí bude vždy rozdělena do dvou oblastí očíslovaných podle klasického číslování v literatuře; oblast vinutí „3“ a oblast otevření drážky „0“. V obou oblastech bude pro porovnání obou přístupů proveden výpočet činitele magnetické vodivosti z energie magnetického pole a pomocí spřaženého toku.



Obr. 2.1: Definice rozměrů obdélníkové drážky s jednovrstvým vinutím

2.2.1 *Výpočet pomocí energie magnetického pole*

2.2.1.1 *Oblast vinutí „3“*

V oblasti se nachází zdroj magnetického pole a celkový proud je závislý na pozici:

$$H_3 b_d = J y b_d \tag{2.2-2}$$

Vyjádřením intenzity pole a substitucí do (2.1-3) získáme vztah

$$w_{m3} = \frac{1}{2}\mu_0 J^2 y^2 \,, \tag{2.2-3}$$

který je po integraci přes výšku oblasti h_{d3}

$$W_{m3} = b_d l_{Fe} \int_0^{h_{d3}} \frac{1}{2}\mu_0 J^2 y^2 \, dy = \frac{1}{2}\mu_0 J^2 \frac{h_{d3}^3}{3} b_d l_{Fe} \tag{2.2-4}$$

Použit pro výpočet činitele magnetické vodivosti oblasti vinutí

$$\lambda_3 = \frac{2\frac{1}{2}\mu_0 J^2 \frac{h_{d3}^3}{3} b_d l_{Fe}}{\mu_0 J^2 h_{d3}^2 b_d^2 l_{Fe}} = \frac{h_{d3}}{3 b_d} \tag{2.2-5}$$

2.2.1.2 *Oblast otevření drážky „0“*

Všechny siločáry v této oblasti zabírají s celým vinutím:

$$H_0 b_{d0} = J h_{d3} b_d \tag{2.2-6}$$

Následující postup je již shodný se vzorci (2.2-3) - (2.2-5).

$$w_{m0} = \frac{1}{2}\mu_0 J^2 h_{d3}^2 \frac{b_d^2}{b_{d0}^2} \tag{2.2-7}$$

$$W_{m0} = b_{d0} l_{Fe} \int_0^{h_{d0}} \frac{1}{2} \mu_0 J^2 h_{d3}^2 \frac{b_d^2}{b_{d0}^2}\, dy = \frac{1}{2} \mu_0 J^2 h_{d3}^2 h_{d0} \frac{b_d^2}{b_{d0}} l_{Fe} \tag{2.2-8}$$

$$\lambda_0 = \frac{2 \frac{1}{2} \mu_0 J^2 h_{d3}^2 h_{d0} \frac{b_d^2}{b_{d0}} l_{Fe}}{\mu_0 J^2 h_{d3}^2 b_d^2 l_{Fe}} = \frac{h_{d0}}{b_{d0}} \tag{2.2-9}$$

2.2.2 Výpočet pomocí spřaženého toku

2.2.2.1 Oblast vinutí „3“

Velikost elementu magnetického toku závisí na pozici v oblasti, proto

$$d\Phi_3 = \mu_0 J y l_{Fe} \tag{2.2-10}$$

Spřažený tok každého elementu závitu závisí na jeho pozici, proto je činitel $k_\Phi = y/h_{d3}$

$$\Psi_3 = \int_0^{h_{d3}} \frac{y}{h_{d3}} \mu_0 J y l_{Fe} dy = \mu_0 J \frac{h_{d3}^2}{3} l_{Fe} \tag{2.2-11}$$

A činitel magnetické vodivosti drážky

$$\lambda_3 = \frac{\mu_0 J \frac{h_{d3}^2}{3} l_{Fe}}{\mu_0 J h_{d3} b_d l_{Fe}} = \frac{h_{d3}}{3 b_d} \tag{2.2-12}$$

2.2.2.2 Oblast otevření drážky „0“

Opět nutno zohlednit rozdílnou šířku drážky v oblasti jejího otevření

$$d\Phi_0 = \mu_0 J h_{d3} \frac{b_d}{b_{d0}} l_{Fe} dy \tag{2.2-13}$$

a následující postup je opět shodný s předchozím

$$\Psi_0 = \int_0^{h_{d0}} \mu_0 J h_{d3} \frac{b_d}{b_{d0}} l_{Fe} dy = \mu_0 J h_{d3} h_{d0} \frac{b_d}{b_{d0}} l_{Fe} \tag{2.2-14}$$

$$\lambda_0 = \frac{\mu_0 J h_{d3} h_{d0} \frac{b_d}{b_{d0}} l_{Fe}}{\mu_0 J h_{d3} b_d l_{Fe}} = \frac{h_{d0}}{b_{d0}} \tag{2.2-15}$$

2.2.3 Výsledný činitel magnetické vodivosti

Celkový činitel magnetické vodivosti je dán součtem

$$\lambda = \lambda_3 + \lambda_0 = \frac{h_{d3}}{3 b_d} + \frac{h_{d0}}{b_{d0}} \tag{2.2-16}$$

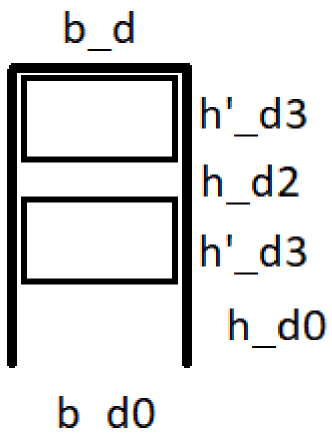
a samozřejmě vychází shodný pomocí obou popsaných přístupů.

2.3 Rozptylová indukčnost obdélníkové drážky dvouvrstvého vinutí s plným krokem

Klasická obdélníková drážka postupného dvouvrstvého vinutí je rozdělená horizontálně na horní a spodní cívkovou stranu (viz Obr. 2.2). Mezi oběma vrstvami se nachází mezivrstva způsobená cívkovou izolací a izolací mezi vrstvami. Často se však tato mezivrstva ve výpočtu neuvažuje a na drážku se nahlíží podobně jako drážku s jednovrstvým vinutím. K přímému porovnání s jednovrstvým vinutím budeme uvažovat celkový proud *I* = 1 p.u. v obou vrstvách dohromady, a proto pro proudovou hustotu platí

$$I = 2Jh'_{d3}b_d \tag{2.3-1}$$

Výpočetní oblasti jsou tentokrát 4; oblast u dna drážky bude označená jako „3b“ a horní cívková vrstva jako „3t“ a přibyde mezivrstva „2“. Výpočet je založen na stejném principu, jako u jednovrstvého vinutí a nebude dále komentován, pokud to nebude nutné.



Obr. 2.2: Definice rozměrů obdélníkové drážky s dvouvrstvým horizontálně děleným vinutím

2.3.1 Výpočet pomocí energie magnetického pole

2.3.1.1 Oblast vinutí u dna drážky „3b“

$$H_{3b}b_d = Jyb_d \tag{2.3-2}$$

$$w_{m3b} = \frac{1}{2}\mu_0 J^2 y^2 \tag{2.3-3}$$

$$W_{m3b} = b_d l_{Fe} \int_0^{h'_{d3}} \frac{1}{2}\mu_0 J^2 y^2 \, dy = \frac{1}{2}\mu_0 J^2 \frac{h'^3_{d3}}{3} b_d l_{Fe} \tag{2.3-4}$$

$$\lambda_{3b} = \frac{2\frac{1}{2}\mu_0 J^2 \frac{h'^3_{d3}}{3} b_d l_{Fe}}{\mu_0 J^2 \cdot 4h'^2_{d3} b_d^2 l_{Fe}} = \frac{h'_{d3}}{4 \cdot 3b_d} \tag{2.3-5}$$

2.3.1.2 Oblast mezivrstvy„2“

Mezivrstva se chová podobně, jako oblast otevření drážky, ale zabírá pouze s polovinou proudu drážkou. Proto je ve výsledku úměrná jedné čtvrtině.

$$H_2 b_d = J h'_{d3} b_d \tag{2.3-6}$$

$$w_{m2} = \mu_0 J^2 h'^2_{d3} \tag{2.3-7}$$

$$W_{m2} = b_d l_{Fe} \int_0^{h_{d2}} \frac{1}{2} \mu_0 J^2 h'^2_{d3}\, dy = \frac{1}{2} \mu_0 J^2 h'^2_{d3} h_{d2} b_d l_{Fe} \tag{2.3-8}$$

$$\lambda_2 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \mu_0 J^2 h'^2_{d3} h_{d2} b_d l_{Fe}}{\mu_0 J^2 \cdot 4 h'^2_{d3} b_d^2 l_{Fe}} = \frac{h_{d2}}{4 b_d} \tag{2.3-9}$$

2.3.1.3 Oblast vinutí u otevření drážky„3t“

Vinutí v této oblasti plně zabírá s magnetickým polem vybuzeným spodní vrstvou a pak částečně s vlastním magnetickým polem:

$$H_{3t} b_d = J y b_d + J h'_{d3} b_d = J(y + h'_{d3}) b_d \tag{2.3-10}$$

$$w_{m3t} = \frac{1}{2} \mu_0 J^2 (y + h'_{d3})^2 \tag{2.3-11}$$

$$\begin{aligned} W_{m3t} &= b_d l_{Fe} \int_0^{h'_{d3}} \frac{1}{2} \mu_0 J^2 (y^2 + 2 y h'_{d3} + h'^2_{d3})\, dy \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 J^2 \left(\frac{h'^3_{d3}}{3} + h'^3_{d3} + h'^3_{d3} \right) b_d l_{Fe} \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 J^2 \cdot \frac{7}{3} h'^3_{d3} b_d l_{Fe} \end{aligned} \tag{2.3-12}$$

$$\lambda_{3t} = \frac{2 \frac{1}{2} \mu_0 J^2 \cdot \frac{7}{3} h'^3_{d3} b_d l_{Fe}}{\mu_0 J^2 \cdot 4 h'^2_{d3} b_d^2 l_{Fe}} = \frac{\frac{7}{3} h'_{d3}}{4 b_d} = \frac{7}{4} \frac{h'_{d3}}{3 b_d} \tag{2.3-13}$$

2.3.1.4 Oblast otevření drážky „0“

Situace plně odpovídá drážce s jednovrstvým vinutím:

$$H_0 b_{d0} = J \cdot 2 h'_{d3} b_d \tag{2.3-14}$$

$$w_{m0} = 2 \mu_0 J^2 h'^2_{d3} \frac{b_d^2}{b_{d0}^2} \tag{2.3-15}$$

$$W_{m0} = b_{d0} l_{Fe} \int_0^{h_{d0}} 2 \mu_0 J^2 h'^2_{d3} \frac{b_d^2}{b_{d0}^2}\, dy = 2 \mu_0 J^2 h'^2_{d3} h_{d0} \frac{b_d^2}{b_{d0}} l_{Fe} \tag{2.3-16}$$

$$\lambda_0 = \frac{2 \cdot 2 \mu_0 J^2 h'^2_{d3} h_{d0} \frac{b_d^2}{b_{d0}} l_{Fe}}{\mu_0 J^2 \cdot 4 h'^2_{d3} b_d^2 l_{Fe}} = \frac{h_{d0}}{b_{d0}} \tag{2.3-17}$$

2.3.2 Výpočet pomocí spřaženého toku

Pro přímé porovnání s jednovrstvým vinutím je nutné uvažovat opět jeden závit na celou drážku N = 1.

2.3.2.1 Oblast vinutí u dna drážky„3b“

$$d\Phi_{3b} = \mu_0 J y l_{Fe} \tag{2.3-18}$$

Spřažený tok každého elementu opět závitu závisí na jeho pozici, proto je činitel $k_\Phi = y/h'_{d3}$. Zároveň se v této oblasti nachází jen 1/2 závitu (viz poznámka o srovnání s jednovrstvým vinutím):

$$\Psi_{3b} = \frac{1}{2}\int_0^{h'_{d3}} \frac{y}{h'_{d3}} \mu_0 J y l_{Fe} dy = \frac{1}{2}\mu_0 J \frac{h'^2_{d3}}{3} l_{Fe} \tag{2.3-19}$$

$$\lambda_{3b} = \frac{\frac{1}{2}\mu_0 J \frac{h'^2_{d3}}{3} l_{Fe}}{\mu_0 J \cdot 2h'_{d3} b_d l_{Fe}} = \frac{h'_{d3}}{4 \cdot 3b_d} \tag{2.3-20}$$

2.3.2.2 Oblast mezivrstvy„2“

$$d\Phi_2 = \mu_0 J h'_{d3} l_{Fe} dy \tag{2.3-21}$$

To spřažený s touto oblasti je opět vybuzen pouze ½ závitu

$$\Psi_2 = \frac{1}{2}\int_0^{h_{d2}} \mu_0 J h'_{d3} l_{Fe} dy = \frac{1}{2}\mu_0 J h'_{d3} h_{d2} l_{Fe} \tag{2.3-22}$$

$$\lambda_2 = \frac{\frac{1}{2}\mu_0 J h'_{d3} h_{d2} l_{Fe}}{\mu_0 J \cdot 2h'_{d3} b_d l_{Fe}} = \frac{h_{d2}}{4b_d} \tag{2.3-23}$$

2.3.2.3 Oblast vinutí u otevření drážky„3t“

Vinutí v této oblasti plně zabírá s magnetickým polem vybuzeným spodní vrstvou a pak částečně s vlastním magnetickým polem:

$$d\Phi_{3t} = \mu_0 J (y + h'_{d3}) l_{Fe} = \mu_0 J y l_{Fe} + \mu_0 J h'_{d3} l_{Fe} \tag{2.3-24}$$

Každé cívkové straně odpovídá 1/2 závitu. Tok v této oblasti je spřažený plně se spodní cívkovou stranou (k_Φ = 1) a zároveň částečně zabírá s horní cívkovou stranou ($k_\Phi = y/h_{d3}$), proto platí

$$\begin{aligned}\Psi_{3t} &= \frac{1}{2}\int_0^{h'_{d3}} \left(1 + \frac{y}{h'_{d3}}\right) \mu_0 J y l_{Fe} dy + \frac{1}{2}\int_0^{h'_{d3}} \left(1 + \frac{y}{h'_{d3}}\right) \mu_0 J h'_{d3} l_{Fe} dy = \\ &= \frac{1}{2}\mu_0 J \frac{h'^2_{d3}}{2} l_{Fe} + \frac{1}{2}\mu_0 J \frac{h'^2_{d3}}{3} l_{Fe} + \frac{1}{2}\mu_0 J h'^2_{d3} l_{Fe} + \frac{1}{2}\mu_0 J \frac{h'^2_{d3}}{2} l_{Fe} = \\ &= \frac{7}{6}\mu_0 J h'^2_{d3} l_{Fe}\end{aligned} \tag{2.3-25}$$

$$\lambda_{3t} = \frac{\frac{7}{6}\mu_0 J h'^2_{d3} l_{Fe}}{\mu_0 J \cdot 2h'_{d3} b_d l_{Fe}} = \frac{\frac{7}{6} h'^2_{d3}}{2h'_{d3} b_d} = \frac{7}{4}\frac{h'_{d3}}{3b_d} \tag{2.3-26}$$

2.3.2.4 Oblast otevření drážky „0“

Zde je již situace stejná, jako u předchozích výpočtů.

$$d\Phi_0 = \mu_0 J \cdot 2h'_{d3} \frac{b_d}{b_{d0}} l_{Fe} dy \tag{2.3-27}$$

$$\Psi_0 = \int_0^{h_{d0}} \mu_0 J \cdot 2h'_{d3} \frac{b_d}{b_{d0}} l_{Fe} dy = 2\mu_0 J h'_{d3} h_{d0} \frac{b_d}{b_{d0}} l_{Fe} \tag{2.3-28}$$

$$\lambda_0 = \frac{2\mu_0 J h_{d3} h_{d0} \frac{b_d}{b_{d0}} l_{Fe}}{\mu_0 J \cdot 2h_{d3} b_d l_{Fe}} = \frac{h_{d0}}{b_{d0}} \tag{2.3-29}$$

2.3.3 Výsledný činitel magnetické vodivosti

Výsledky obdržené oběma způsoby jsou opět identické, čímž je ověřen předložený přístup k řešení problematiky. Celkový činitel magnetické vodivosti je

$$\lambda = \lambda_{3b} + \lambda_2 + \lambda_{3t} + \lambda_0 = \frac{2h'_{d3}}{3b_d} + \frac{h_{d2}}{4b_d} + \frac{h_{d0}}{b_{d0}} \tag{2.3-30}$$

Pokud při porovnání s jednovrstvým vinutím položíme rovno $h_{d3} = 2h'_{d3}$, bude tvar rovnice (2.3-30) shodný s rovnicí jednovrstvého vinutí (2.2-16) (při zanedbání mezivrstvy 2). To je samozřejmě správný a nijak nepřekvapivý výsledek.

2.3.4 Výpočet pomocí vlastních a vzájemných indukčností

Při výpočtu činitele magnetické vodivosti oblasti „3t“ pomocí spřažených toků již bylo nutné rozlišit toky vybuzené spodní a horní vrstvou vinutí a zároveň toky v této oblasti spřažené se spodní a s horní vrstvou vinutí. Tento výpočet se již podobal výpočtu vlastních a vzájemných indukčností (respektovaných pomocí vlastních a vzájemných činitelů diferenčního rozptylu). Celkový diferenční rozptyl drážky s dvouvrstvým vinutím lze obecně zapsat jako

$$\lambda = \lambda_{bb} + \lambda_{tt} + \lambda_{bt} + \lambda_{tb} \tag{2.3-31}$$

Jednotlivé činitele magnetické vodivosti budou vypočteny ze spřažených toků vždy za předpokladu, že pouze jednou vrstvou protéká proud a sledují se toky v obou vrstvách pro určení vlastních a vzájemných indukčností.

2.3.4.1 Vlastní indukčnost spodní vrstvy „bb“

Jedná se o všechny toky ve všech oblastech drážky spřažené se spodní vrstvou. V oblasti „3b“ je situace shodná s výpočtem v 2.3.2 a činitel magnetické vodivosti je určen dle rovnice (2.3-20). V oblastech „2, 3t, 0“ se již nenachází zdroj magnetického pole (J = 0) a magnetické pole je vybuzené pouze spodní vrstvou; proto je výpočet shodný s kapitolou 2.3.2.2 a výsledný vzorec dle (2.3-23) je upraven dle rozměrů příslušné oblasti. Výsledný činitel magnetické vodivosti je pak

$$\lambda_{bb} = \frac{h'_{d3}}{4 \cdot 3b_d} + \frac{h_{d2}}{4b_d} + \frac{h'_{d3}}{4b_d} + \frac{h_{d0}}{4b_0} \tag{2.3-32}$$

2.3.4.2 Vlastní indukčnost horní vrstvy „tt“

Výpočet je shodný s vlastní indukčností spodní vrstvy „tt“, omezený pouze na oblasti „3t, 0“ a výsledný činitel magnetické vodivosti je

$$\lambda_{tt} = \frac{h'_{d3}}{4 \cdot 3b_d} + \frac{h_{d0}}{4b_0} \tag{2.3-33}$$

2.3.4.3 Vzájemná indukčnost vybuzená spodní vrstvou „bt“

Toky vybuzené spodní vrstvou v oblastech „3b, 2“ nejsou spřažené s horní vrstvou vinutí. Ve vrstvě „3t“ se již nachází konstantní pole o intenzitě dle vztahu

$$H_{3bt} b_d = J h'_{d3} b_d \,, \tag{2.3-34}$$

čemuž odpovídá elementární magnetický tok

$$d\Phi_{3\mathrm{bt}} = \mu_0 J h'_{d3} l_{Fe} dy \tag{2.3-35}$$

Velikost spřaženého toku opět závisí na konkrétní poloze elementu vinutí, a proto je nutné použít činitel $k_\Phi = y/h'_{d3}$:

$$\Psi_{3\mathrm{b}t} = \frac{1}{2} \int_0^{h'_{d3}} \frac{y}{h'_{d3}} \mu_0 J h'_{d3} l_{Fe} dy = \frac{1}{2} \mu_0 J \frac{h'^2_{d3}}{2} l_{Fe} \tag{2.3-36}$$

$$\lambda_{3bt} = \frac{\frac{1}{4} \mu_0 J h'^2_{d3} l_{Fe}}{\mu_0 J \cdot 2h'_{d3} b_d l_{Fe}} = \frac{h'_{d3}}{4 \cdot 2b_d} \tag{2.3-37}$$

Výpočet pro oblast „0“ je již neměnný a výsledný činitel magnetické vodivosti je

$$\lambda_{bt} = \frac{h'_{d3}}{4 \cdot 2b_d} + \frac{h_{d0}}{4b_0} \tag{2.3-38}$$

2.3.4.4 Vzájemná indukčnost vybuzená horní vrstvou „tb“

V oblastech „3b, 2“ je nulová intenzita magnetického pole, tudíž je nutné analyzovat stejné oblasti, jako v předchozím případě. V oblasti „3t“ je rostoucí intenzita magnetického pole dle vztahu

$$H_{3tb} b_d = J y b_d \,, \tag{2.3-39}$$

čemuž odpovídá elementární magnetický tok

$$d\Phi_{3\mathrm{t}b} = \mu_0 J y l_{Fe} \tag{2.3-40}$$

Veškerý vybuzený tok zabírá s celým vinutím vrstvy „3b“ a koeficient $k_\Phi = 1$:

$$\Psi_{3tb} = \frac{1}{2}\int_0^{h'_{d3}} \mu_0 J y l_{Fe} dy = \frac{1}{2}\mu_0 J \frac{h'^2_{d3}}{2} l_{Fe} \tag{2.3-41}$$

$$\lambda_{3bt} = \frac{\frac{1}{4}\mu_0 J h'^2_{d3} l_{Fe}}{\mu_0 J \cdot 2h'_{d3} b_d l_{Fe}} = \frac{h'_{d3}}{4 \cdot 2b_d} \tag{2.3-42}$$

Výpočet pro oblast „0“ je opět shodný a výsledný činitel magnetické vodivosti je

$$\lambda_{tb} = \frac{h'_{d3}}{4 \cdot 2b_d} + \frac{h_{d0}}{4b_0} \tag{2.3-43}$$

2.3.4.5 Výsledný činitel magnetické vodivosti

Bylo dosaženo shodných vzájemných indukčností (činitelů magnetické vodivosti) λ_{bt} a λ_{tb}. To je základní předpoklad u všech nejen lineárních magnetických systémů a pouze to dokazuje správnost použité metody.

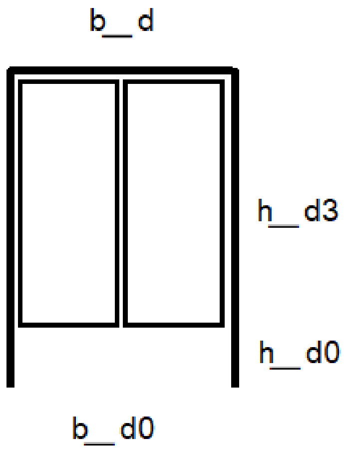
Dosazením výsledků (2.3-32), (2.3-33), (2.3-38), (2.3-43) do (2.3-31) je obdržen výsledný vztah

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h'_{d3}}{4 \cdot 3b_d} + \frac{h_{d2}}{4b_d} + \frac{h'_{d3}}{4b_d} + \frac{h_{d0}}{4b_0} + \frac{h'_{d3}}{4 \cdot 3b_d} + \frac{h_{d0}}{4b_0} + 2\left(\frac{h'_{d3}}{4 \cdot 2b_d} + \frac{h_{d0}}{4b_0}\right) = \\ &= \frac{2h'_{d3}}{3b_d} + \frac{h_{d2}}{4b_d} + \frac{h_{d0}}{b_0}\end{aligned} \tag{2.3-44}$$

Tento výsledný vztah je shodný s již dříve obdrženým vztahem (2.3-30).

2.3.5 Vertikálně dělená drážka

Při použití zubového dvouvrstvého vinutí je často drážka rozdělena vertikálně dle Obr. 2.3. Při použití jiného přístupu než založeného na výpočtu vlastních a vzájemných indukčností bude postup identický s jednovrstvým vinutím; proto se zaměříme právě na výpočet vlastních a vzájemných indukčností cívkové strany umístěné vlevo a vpravo (*ll*, *rr*, *lr*, *rl*). Vzhledem k symetrii drážky je patrné, že nezávisí na umístění cívkové strany a indukčnosti budou symetrické. Zároveň platí, že veškerý tok vybuzený jednou cívkou je zároveň spřažený i s cívkou druhou. Vlastní i vzájemné indukčnosti jsou tak totožné a stačí vypočítat pouze jednu vlastní indukčnost.



Obr. 2.3: Definice rozměrů obdélníkové drážky s dvouvrstvým vertikálně děleným vinutím

Je napájena pouze jedna cívková strana a intenzita magnetického pole v oblasti vinutí „3" je rovna

$$H_{3ll} b_d = J y \frac{b_d}{2} \tag{2.3-45}$$

Tomu odpovídá elementární magnetický tok

$$d\Phi_{3ll} = \frac{1}{2} \mu_0 J y l_{Fe} \tag{2.3-46}$$

Velikost spřaženého toku opět závisí na konkrétní poloze elementu vinutí, a proto je nutné použít činitel $k_\Phi = y/h_{d3}$:

$$\Psi_{3ll} = \frac{1}{2} \int_0^{h_{d3}} \frac{y}{h_{d3}} \frac{1}{2} \mu_0 J y l_{Fe} dy = \frac{1}{4} \mu_0 J \frac{h_{d3}^2}{3} l_{Fe} \tag{2.3-47}$$

$$\lambda_{3ll} = \frac{\frac{1}{4} \mu_0 J \frac{h_{d3}^2}{3} l_{Fe}}{\mu_0 J h_{d3} b_d l_{Fe}} = \frac{h_{d3}}{4 \cdot 3 b_d} \tag{2.3-48}$$

V oblasti otevření drážky „0" je intenzita magnetického pole

$$H_{0ll} b_{d0} = J h_{d3} \frac{b_d}{2}, \tag{2.3-49}$$

čemuž odpovídá elementární magnetický tok

$$d\Phi_{0ll} = \mu_0 J h_{d3} \frac{b_d}{2 b_{d0}} l_{Fe} \tag{2.3-50}$$

Veškerý vybuzený tok zabírá s celou cívkovou stranou a koeficient $k_\Phi = 1$:

$$\Psi_{0ll} = \frac{1}{2} \int_0^{h_{d0}} \mu_0 J h_{d3} \frac{b_d}{2 b_{d0}} l_{Fe} dy = \frac{1}{4} \mu_0 J h_{d3} h_{d0} \frac{b_d}{b_{d0}} l_{Fe} \tag{2.3-51}$$

$$\lambda_{0ll} = \frac{\frac{1}{4}\mu_0 J h_{d3} h_{d0} \frac{b_d}{b_{d0}} l_{Fe}}{\mu_0 J h_{d3} b_d l_{Fe}} = \frac{h_{d0}}{4 \cdot b_{d0}} \tag{2.3-52}$$

Výsledný činitel magnetické vodivosti je potom roven

$$\lambda = \lambda_{ll} + \lambda_{rr} + \lambda_{lr} + \lambda_{rl} = 4\lambda_{ll} = 4\left(\frac{h_{d3}}{4 \cdot 3b_d} + \frac{h_{d0}}{4 \cdot b_{d0}}\right) = \frac{h_{d3}}{3b_d} + \frac{h_{d0}}{b_{d0}} \tag{2.3-53}$$

2.3.6 Zhodnocení použitých metod

Pro výpočet činitele magnetické vodivosti drážky s dvouvrstvým vinutím a stejným činitelem kroku byly použity tři více či méně podobné přístupy: výpočet složek dle jednotlivých oblastí drážky pomocí energie magnetického pole a spřaženého toku a výpočet vlastních a vzájemných indukčností pomocí spřaženého toku.

Výpočet pomocí energie magnetického pole je nejjednodušší, bez nutnosti úpravy vzorců dle aktuálního počtu závitů, se kterými tok zabírá. Naopak přístup založený na výpočtu vlastních a vzájemných indukčností je lépe průkazný a je pomocí něho možné lépe popsat, jaký vliv bude mít zkrácení kroku vinutí o různém počtu fází na celkovou rozptylovou indukčnost drážky.

2.4 Rozptylová indukčnost obdélníkové drážky dvouvrstvého vinutí se zkráceným krokem

Pro obecný výpočet vlivu zkrácení kroku na indukčnost drážky budou zavedeny následující předpoklady:

- Stále jsou analyzovány pouze samostatné drážky
- Stále je uvažován časový okamžik, kdy proud analyzovaného vinutí *I* je v amplitudě
- Proud vinutí ve druhé vrstvě má v tomto časovém okamžiku obecnou velikost *I*·cos(α)

I v případě vinutí se zkráceným krokem obsahují některé drážky cívkové strany patřící ke stejné fázi; tato varianta však byla vyšetřována v předchozí kapitole. Proto budou uvažovány celkem tři varianty s analyzovanou cívkovou stranou ve spodní a v horní vrstvě a potom vertikální dělení drážky a budou určeny příslušné vlastní a vzájemné indukčnosti.

2.4.1 Analyzovaná cívková strana ve spodní vrstvě

Vlastní indukčnost je vypočtena dle kapitoly 2.3.4.1, vzájemná indukčnost pak dle kapitoly 2.3.4.4; výpočet je však nutné upravit.

V horní oblasti „3t“ je rostoucí intenzita magnetického pole vybuzená proudem *I*·cos(α) dle vztahu

$$H_{3tb} b_d = J\cos(\alpha)\, y b_d\,, \tag{2.4-1}$$

čemuž odpovídá elementární magnetický tok

$$d\Phi_{3tb} = \mu_0 J y l_{Fe} \cos(\alpha)\, dy \tag{2.4-2}$$

Veškerý vybuzený tok zabírá s celým vinutím vrstvy „3b“ a koeficient $k_\Phi = 1$:

$$\Psi_{3tb} = \frac{1}{2}\int_{0}^{h'_{d3}} \mu_0 J y l_{Fe}\cos(\alpha)\,dy = \frac{1}{2}\mu_0 J\frac{h'^2_{d3}}{2} l_{Fe}\cos(\alpha) \qquad (2.4\text{-}3)$$

$$\lambda_{3bt} = \frac{\frac{1}{4}\mu_0 J h'^2_{d3} l_{Fe}\cos(\alpha)}{\mu_0 J\cdot 2h'_{d3} b_d l_{Fe}} = \frac{h'_{d3}}{4\cdot 2b_d}\cos(\alpha) \qquad (2.4\text{-}4)$$

Změna proudu v horní vrstvě se projeví stejným způsobem i v oblasti otevření drážky „0“ a výsledný činitel magnetické vodivosti je

$$\lambda_{0tb} = \left(\frac{h'_{d3}}{4\cdot 2b_d} + \frac{h_{d0}}{4b_0}\right)\cos(\alpha) \qquad (2.4\text{-}5)$$

Celková indukčnost cívkové strany ve spodní vrstvě je tak úměrná

$$\lambda_b = \frac{h'_{d3}}{3b_d} + \frac{h_{d2}}{4b_d} + \frac{h_{d0}}{4b_0} + \left(\frac{h'_{d3}}{4\cdot 2b_d} + \frac{h_{d0}}{4b_0}\right)\cos(\alpha) \qquad (2.4\text{-}6)$$

2.4.2 Analyzovaná cívková strana v horní vrstvě

Vlastní indukčnost je vypočtena dle kapitoly 2.3.4.2, vzájemná indukčnost pak dle kapitoly 2.3.4.3, kde výpočet je nutné upravit.

Ve vrstvě „3t“ se již nachází konstantní pole vybuzené proudem $I\cdot\cos(\alpha)$ o intenzitě dle vztahu

$$H_{3bt} b_d = J\cos(\alpha)\,h'_{d3} b_d\,, \qquad (2.4\text{-}7)$$

čemuž odpovídá elementární magnetický tok

$$d\Phi_{3\mathrm{bt}} = \mu_0 J h'_{d3} l_{Fe}\cos(\alpha)\,dy \qquad (2.4\text{-}8)$$

Velikost spřaženého toku opět závisí na konkrétní poloze elementu vinutí, a proto je nutné použít činitel $k_\Phi = y/h'_{d3}$:

$$\Psi_{3\mathrm{bt}} = \frac{1}{2}\int_{0}^{h'_{d3}} \frac{y}{h'_{d3}}\mu_0 J h'_{d3} l_{Fe}\cos(\alpha)\,dy = \frac{1}{2}\mu_0 J\frac{h'^2_{d3}}{2} l_{Fe}\cos(\alpha) \qquad (2.4\text{-}9)$$

$$\lambda_{3bt} = \frac{\frac{1}{4}\mu_0 J h'^2_{d3} l_{Fe}\cos(\alpha)}{\mu_0 J\cdot 2h'_{d3} b_d l_{Fe}} = \frac{h'_{d3}}{4\cdot 2b_d}\cos(\alpha) \qquad (2.4\text{-}10)$$

Změna proudu v horní vrstvě se projeví stejným způsobem i v oblasti otevření drážky „0“ a výsledný činitel magnetické vodivosti je

$$\lambda_{0bt} = \left(\frac{h'_{d3}}{4\cdot 2b_d} + \frac{h_{d0}}{4b_0}\right)\cos(\alpha) \qquad (2.4\text{-}11)$$

Celková indukčnost cívkové strany v horní vrstvě je tak úměrná

$$\lambda_t = \frac{h'_{d3}}{4\cdot 3b_d} + \frac{h_{d0}}{4b_0} + \left(\frac{h'_{d3}}{4\cdot 2b_d} + \frac{h_{d0}}{4b_0}\right)\cos(\alpha) \qquad (2.4\text{-}12)$$

2.4.3 Vertikální dělení drážky

Vlastní indukčnost je vypočtena dle kapitoly 2.3.5 a určena rovnicemi (2.3-48) a (2.3-52), výpočet vzájemné indukčnosti je pak po vzoru předchozích kapitol možné upravit do tvaru

$$\lambda_{lr} = \left(\frac{h_{d3}}{4 \cdot 3b_d} + \frac{h_{d0}}{4 \cdot b_{d0}}\right)\cos(\alpha) \tag{2.4-13}$$

a celková indukčnost jedné cívkové strany je pak úměrná

$$\lambda_{l} = \left(\frac{h_{d3}}{4 \cdot 3b_d} + \frac{h_{d0}}{4 \cdot b_{d0}}\right)(1+\cos(\alpha)) \tag{2.4-14}$$

2.5 Závěrečné zhodnocení

Výhoda samostatného výpočtu vlastních a vzájemných indukčností se projevila při uvažování rozdílné velikosti proudu jednotlivých cívkových stran v drážce. Zatímco vlastní indukčnost se nemění, vzájemná indukčnost je přímo úměrná velikosti proudu druhé cívkové strany.

3 Výpočet vlivu zkráceného kroku třífázového vinutí

Tato kapitola slouží jako odrazový můstek pro následující výpočty vícefázových vinutí. Tento výpočet byl již proveden v začátcích 20. století a výsledky jsou v kruzích výpočtářů notoricky známé. Odvození výpočtů je ukázáno např. v [1]. Autor této zprávy postup zopakoval v dizertační práci [2] pro potřeby dalšího odvození odlišných uspořádání vinutí.

Postup v obou publikacích je podobný; využívá se výpočet pomocí energie magnetického pole a časový okamžik, kdy proudy v jednotlivých fázích jsou v poměrných jednotkách i_A = 0, i_B = √3/2 a i_C = -√3/2. Porovnávány jsou potom činitele magnetické vodivosti drážek celé pólové rozteče vinutí se zkráceným krokem a s krokem plným.

Tento časový okamžik je výhodný pro třífázové vinutí, kde jsou specifické poměry mezi proudy symetrického třífázového vinutí. Při použití obecně *m*-fázového vinutí se poměry mezi proudy mění a zejména narůstá počet fází a počet kombinací částečného překryvu fází.

Proto je v této kapitole ukázán přístup pomocí vlastních a vzájemných indukčností, kdy je porovnáváno pouze vinutí příslušné fáze a poměry mezi vinutím se zkráceným a plným krokem. Proud tímto analyzovaným vinutím je stále roven 1 p.u.

Při výpočtu je také nutné rozlišovat velikost zkrácení kroku ve vztahu k počtu fází. Je vhodné zavést činitel zkrácení kroku β definovaný jako

$$\beta = \frac{y_{1d}}{t_{pd}} \tag{2.5-1}$$

kde y_{1d} je krok vinutí v počtu drážek a t_{pd} je pólová rozteč v počtu drážek. Při zkrácení kroku vinutí se začnou zadní cívkové strany sousední fázové skupiny podsouvat pod přední cívkové strany analyzované fáze a naopak. Pokud dojde k dalšímu výraznějšímu zkrácení kroku, začne se uplatňovat i fázová skupina umístěna o jednu dál atd. Obecně lze jednotlivé výpočetní intervaly činitele zkrácení kroku definovat jako

$$\beta\epsilon\left(1-k\frac{1}{m};1-(k-1)\frac{1}{m}\right\rangle \cup \left(1+(k-1)\frac{1}{m};1+k\frac{1}{m}\right\rangle, k=1,2,\dots,m \tag{2.5-2}$$

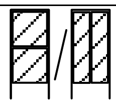
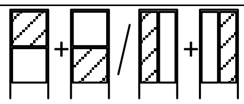
Tyto intervaly zahrnují krok zkrácený i prodloužený; V praxi však dochází téměř výhradně jen ke zkracování kroku. Pro třífázové vinutí jsou mezní hodnoty zkráceného kroku rovny 0, 1/3, 2/3 a 1. Je patrné, že zkrácení kroku na méně než 2/3 pólové rozteče je velmi nepravděpodobné; nicméně u vícefázových vinutí se tyto mezní hodnoty více přibližují 1 a stávají se více pravděpodobné. Proto bude i u třífázového vinutí tato oblast počítána a jako mezní hodnota činitele zkrácení kroku bude zvoleno β = 0.5.

Díky symetrickému uspořádání vinutí je možné vždy analyzovat pouze vinutí se zkráceným krokem; výsledky pro prodloužení kroku budou totožné.

3.1 Činitel zkrácení kroku $\beta\epsilon\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right\rangle$

Fázový posun proudu dvou sousedních cívkových skupin je α = 60 °, tudíž proud sousedních skupin je roven cos 60° = 0.5 p.u. Při použití vinutí s plným krokem připadá na jednu pólovou rozteč 1/3 t_{pd} drážek s vinutím pouze jedné fáze. Při zkrácení kroku o každou jednu drážku dojde ke snížení počtu drážek s vinutím jedné fáze o 1 a vytvoření jedné dvojice drážek, s cívkovou stranou v horní a dolní vrstvě (případně levé a pravé vrstvě). Matematicky je tento zápis shrnut v Tab. 1.

Tab. 1: Počty drážek s jednotlivými kombinacemi cívkových stran

Proudový obsah drážky jedné fáze	Drážek na pól	
	β = 1	$\beta\epsilon\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right\rangle$
	$\frac{1}{3}t_{pd}$	$\frac{1}{3}t_{pd}-(t_{pd}-y_{1d})=t_{pd}\left(\beta-\frac{2}{3}\right)$
	0	$t_{pd}-y_{1d}=t_{pd}(1-\beta)$

Obecně lze tak vyjádřit poměr mezi indukčností vinutí se zkráceným a plným krokem jako

$$k_\lambda=\frac{t_{pd}\left(\beta-\frac{2}{3}\right)\lambda_f+t_{pd}(1-\beta)\lambda_p}{\frac{1}{3}t_{pd}\lambda_f}=\frac{(3\beta-2)\lambda_f+3(1-\beta)\lambda_p}{\lambda_f}= \\ =3\beta-2+3(1-\beta)\frac{\lambda_p}{\lambda_f} \tag{3.1-1}$$

kde λ_f je obecně činitel magnetické vodivosti drážky vyplněné cívkovými stranami jedné fáze a λ_p je součet činitelů magnetické vodivosti dvojice drážek s jednou cívkovou stranou příslušné fáze.

Je zapotřebí rozlišit jednotlivé oblasti drážek a zároveň uspořádání cívkových stran v drážce.

3.1.1 *Horizontálně dělená drážka*

Oblast mezivrstvy mezi cívkovými stranami „2“ je ovlivněna pouze spodní cívkovou stranou; jejich počet se nemění, a proto činitel magnetické vodivosti této oblasti je konstantní, nezávislý na kroku vinutí.

Oblast otevření drážky „0“ již je krokem vinutí ovlivněna. Pro drážku plně obsazenou vinutím dané fáze vycházíme z rovnice (2.3-30) a pro částečně zaplněnou z rovnic (2.4-6) a (2.4-12) a činitele λ_f a λ_p jsou

$$\lambda_f = \frac{h_{d0}}{b_{d0}}$$

$$\lambda_p = \frac{h_{d0}}{4b_0} + \frac{h_{d0}}{4b_0}\cos(\alpha) + \frac{h_{d0}}{4b_0} + \frac{h_{d0}}{4b_0}\cos(\alpha) = \frac{h_{d0}}{4b_0} + \frac{h_{d0}}{8b_0} + \frac{h_{d0}}{4b_0} + \frac{h_{d0}}{8b_0} = \qquad (3.1\text{-}2)$$

$$= \frac{3}{4}\frac{h_{d0}}{b_{d0}}$$

Dosazením do činitele k_λ pak pro tuto oblast získáváme

$$k_0 = 3\beta - 2 + 3(1-\beta)\frac{\frac{3}{4}\frac{h_{d0}}{b_{d0}}}{\frac{h_{d0}}{b_{d0}}} = 3\beta - 2 + 3(1-\beta)\frac{3}{4} = \qquad (3.1\text{-}3)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\beta = 0.25(1+3\beta)$$

Stejná situace platí pro oblast vinutí „3b, 3t“, kde vyjdeme ze stejných rovnic a činitele λ_f a λ_p jsou

$$\lambda_f = \frac{2h'_{d3}}{3b_d}$$

$$\lambda_p = \frac{h'_{d3}}{3b_d} + \frac{h'_{d3}}{8b_d}\cos(\alpha) + \frac{h'_{d3}}{12b_d} + \frac{h'_{d3}}{8b_d}\cos(\alpha) = \frac{h'_{d3}}{3b_d} + \frac{h'_{d3}}{16b_d} + \frac{h'_{d3}}{12b_d} + \frac{h'_{d3}}{16b_d} = \qquad (3.1\text{-}4)$$

$$= \frac{13}{24}\frac{h'_{d3}}{b_d}$$

Dosazením do činitele k_λ pak pro tuto oblast získáváme

$$k_3 = 3\beta - 2 + 3(1-\beta)\frac{\frac{13}{24}\frac{h'_{d3}}{b_d}}{\frac{2h'_{d3}}{3b_d}} = 3\beta - 2 + 3(1-\beta)\frac{39}{48} = \qquad (3.1\text{-}5)$$

$$= \frac{7}{16} + \frac{9}{16}\beta = \frac{1}{4}\left(\frac{7}{4} + \frac{9}{4}\beta\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{4}\beta\right) = \frac{1}{4}\left(1 + 3\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\beta\right)\right) =$$

$$= 0.25(1+3k_0)$$

Tyto rovnice se nacházejí v každé knize věnované návrhu elektrických strojů; jednotlivé činitele mají různé symboly, např. k_β a k_β' [3] nebo rozdělené podle oblastí a materiálů jako k_{ke} a k_{Cu} [4]; toto značení je názornější, a proto odteď bude převzato i v rámci této zprávy.

3.1.2 Vertikálně dělená drážka

Pro oblast otevření drážky „0“ jsou definovány shodné činitele jako pro horizontálně dělenou drážku, tudíž a výsledný činitel k_{ke} bude stejný.

Pro oblast vinutí „3l, 3r“ vychází činitel λ_f z rovnice (2.3-53) a činitel λ_p z rovnice (2.4-14):

$$\begin{gathered}\lambda_f = \frac{h_{d3}}{3b_d} \\ \lambda_p = 2\frac{h_{d3}}{4 \cdot 3b_d}(1+\cos(\alpha)) = \frac{h_{d3}}{4b_d}\end{gathered} \tag{3.1-6}$$

Dosazením do činitele k_λ bude činitel k_{Cu} roven

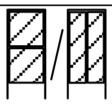
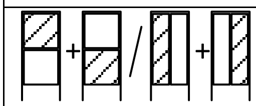
$$\begin{gathered}k_{Cu} = 3\beta - 2 + 3(1-\beta)\frac{\frac{h_{d3}}{4b_d}}{\frac{h_{d3}}{3b_d}} = 3\beta - 2 + 3(1-\beta)\frac{3}{4} = \\ = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\beta = k_{ke}\end{gathered} \tag{3.1-7}$$

Je patrné, že pro vertikálně dělenou drážku jsou činitele k_{Cu} a k_{ke} shodné.

3.2 Činitel zkrácení kroku $\boldsymbol{\beta \epsilon \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right\rangle \cup \left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right\rangle}$

Zde už nedochází k překryvu předních a zadních cívkových stran jedné fáze, naopak kromě sousedních cívkových skupin dochází k překryvu i s další skupinou. Proto je vhodné odlišit sousední skupiny indexem 1 a další v pořadí 2 (pro vícefázová vinutí dále 3, 4, …) Fázový posun proudu dvou sousedních cívkových skupin je α_1 = 60 °, tudíž proud sousedních skupin je roven i_1 = cos 60° = 0.5 p.u. Další skupiny v pořadí mají fázový posun α_2 = 120 ° a velikost proudu je i_2 = cos 120° = -0.5 p.u. Počty drážek s jednotlivými kombinacemi cívkových stran jsou shrnuty v Tab. 2.

Tab. 2 Počty drážek s jednotlivými kombinacemi cívkových stran

Proudový obsah drážky jedné fáze		Drážek na pól	
		β = 1	$\beta \epsilon \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right\rangle \cup \left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right\rangle$
		$\frac{1}{3}t_{pd}$	0
	Překryv se sousední fází λ_{p1}	0	$\frac{1}{3}t_{pd} - \left(t_{pd} - y_{1d} - \frac{1}{3}t_{pd}\right) = t_{pd}\left(\beta - \frac{1}{3}\right)$
	Překryv s fází ob jedno λ_{p2}	0	$t_{pd} - y_{1d} - \frac{1}{3}t_{pd} = t_{pd}\left(\frac{2}{3} - \beta\right)$

Obecně lze tak vyjádřit poměr mezi indukčností vinutí se zkráceným a plným krokem jako

$$k_\lambda = \frac{t_{pd}\left(\beta - \frac{1}{3}\right)\lambda_{p1} + t_{pd}\left(\frac{2}{3} - \beta\right)\lambda_{p2}}{\frac{1}{3}t_{pd}\lambda_f} = \frac{(3\beta - 1)\lambda_{p1} + (2 - 3\beta)\lambda_{p2}}{\lambda_f} = \\ = (3\beta - 1)\frac{\lambda_{p1}}{\lambda_f} + (2 - 3\beta)\frac{\lambda_{p2}}{\lambda_f} \tag{3.2-1}$$

3.2.1 Horizontálně dělená drážka

Využíváme stejné rovnice z kapitoly 3.1.1, upravené dle aktuálních hodnot úhlu α a obecného činitele k_λ.

Pro oblast otevření drážky „0" platí:

$$\lambda_f = \frac{h_{d0}}{b_{d0}}$$

$$\lambda_{p1} = \frac{h_{d0}}{4b_0} + \frac{h_{d0}}{4b_0}\cos(\alpha_1) + \frac{h_{d0}}{4b_0} + \frac{h_{d0}}{4b_0}\cos(\alpha_1) = \frac{3}{4}\frac{h_{d0}}{b_{d0}} \tag{3.2-2}$$

$$\lambda_{p2} = \frac{h_{d0}}{4b_0} + \frac{h_{d0}}{4b_0}\cos(\alpha_2) + \frac{h_{d0}}{4b_0} + \frac{h_{d0}}{4b_0}\cos(\alpha_2) = \frac{h_{d0}}{4b_{d0}}$$

$$k_{ke} = (3\beta - 1)\frac{\frac{3}{4}\frac{h_{d0}}{b_{d0}}}{\frac{h_{d0}}{b_{d0}}} + (2 - 3\beta)\frac{\frac{h_{d0}}{4b_{d0}}}{\frac{h_{d0}}{b_{d0}}} = (3\beta - 1)\frac{3}{4} + (2 - 3\beta)\frac{1}{4} = \\ = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\beta = 0.25(6\beta - 1) \tag{3.2-3}$$

A pro oblast vinutí „3b, 3t":

$$\lambda_f = \frac{2h'_{d3}}{3b_d}$$

$$\lambda_{p1} = \frac{h'_{d3}}{3b_d} + \frac{h'_{d3}}{8b_d}\cos(\alpha_1) + \frac{h'_{d3}}{12b_d} + \frac{h'_{d3}}{8b_d}\cos(\alpha_1) = \frac{13}{24}\frac{h'_{d3}}{b_d}$$

$$\lambda_{p2} = \frac{h'_{d3}}{3b_d} + \frac{h'_{d3}}{8b_d}\cos(\alpha_2) + \frac{h'_{d3}}{12b_d} + \frac{h'_{d3}}{8b_d}\cos(\alpha_2) = \frac{h'_{d3}}{3b_d} - \frac{h'_{d3}}{16b_d} + \frac{h'_{d3}}{12b_d} - \frac{h'_{d3}}{16b_d} \\ = \frac{7}{24}\frac{h'_{d3}}{b_d} \tag{3.2-4}$$

$$k_{Cu} = (3\beta - 1)\frac{\frac{13}{24}\frac{h'_{d3}}{b_d}}{\frac{2h'_{d3}}{3b_d}} + (2 - 3\beta)\frac{\frac{7}{24}\frac{h'_{d3}}{b_d}}{\frac{2h'_{d3}}{3b_d}} = (3\beta - 1)\frac{39}{48} + (2 - 3\beta)\frac{7}{16} = \\ = \frac{1}{16} + \frac{9}{8}\beta = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{9}{2}\beta\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{2}\beta\right) = \frac{1}{4}\left(1 + 3\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\beta\right)\right) = \\ = 0{,}25(1 + 3k_{ke}) \tag{3.2-5}$$

Opět bylo dosaženo výsledků shodných s [3]. Při použití vertikálně děleného vinutí opět bude platit

$$k_{Cu} = k_{ke} = 0{,}25(6\beta - 1) \tag{3.2-6}$$

3.3 Zlomkové vinutí

Dosud bylo uvažováno vinutí s celočíselným počtem drážek na pól a fázi, kdy počty drážek byly vždy vztaženy na jednu pólovou rozteč. Zlomková vinutí však nemají celistvý počet drážek na pól, a tak je nutné vyšetřit, jestli i zde platí výše uvedené vztahy.

Porovnání si uvedeme na příkladu dvouvrstvého vinutí s počtem drážek na pól a fázi q = 7/2. Minimální počet pólů takového vinutí je 2p = 2. Pólová rozteč v počtu drážek je t_{pd} = 10,5 a hraniční krok vinutí je roven $y_{1d} = 2/3t_{pd}$ = 7. Na Obr. 3.1 - Obr. 3.3 jsou porovnány Tingleyho schémata tohoto vinutí s krokem 9, 7 a 5 drážek. Pro porovnání je jako referenční zvolena 1 pólová rozteč vinutí s q = 7. Porovnáním je zřejmé, že počty drážek s jednotlivými kombinacemi cívkových stran jsou pro totožné zkrácení kroku β shodné, tudíž i koeficienty k_{ke} a k_{Cu} mají stejné předpisy. Tato shoda se dá dokázat pro jakékoliv zlomkové vinutí.

```
' A   A   A   A   C'  C'  C'  B   B   B   B  '
' A   A   C'  C'  C'  C'  B   B   B   A'  A' '
'   A'  A'  A'  C   C   C   C   B'  B'  B'   '
'   A'  A'  C   C   C   B'  B'  B'  B'  A    '
```

Obr. 3.1: Tingleyho schéma třífázového vinutí s q = 7/2 a krokem vinutí y_{1d} = 9

```
' A   A   A   A   C'  C'  C'  B   B   B   B  '
' C'  C'  C'  C'  B   B   B   A'  A'  A'  A' '
'   A'  A'  A'  C   C   C   C   B'  B'  B'   '
'   C   C   C   B'  B'  B'  B'  A   A   A    '
```

Obr. 3.2: Tingleyho schéma třífázového vinutí s q = 7/2 a krokem vinutí y_{1d} = 7

```
' A   A   A   A   C'  C'  C'  B   B   B   B  '
' C'  C'  B   B   B   A'  A'  A'  A'  C   C  '
'   A'  A'  A'  C   C   C   C   B'  B'  B'   '
'   C   B'  B'  B'  B'  A   A   A   C'  C'   '
```

Obr. 3.3: Tingleyho schéma třífázového vinutí s q = 7/2 a krokem vinutí y_{1d} = 5

3.3.1 Zubové vinutí

Až dosud byla analyzována vinutí, která obsahovala cívky všech fází, fyzických i matematických. U zubových vinutí však může nastat situace, že např. matematické fáze ve vinutí chybí. To je typický příklad zubového vinutí s q = 1/2. Jeho Tingleyho schéma je zobrazeno na Obr. 3.4. Činitel zkrácení kroku je v tomto případě β = 2/3; porovnáním s vinutím s q = 1 a stejným zkrácením kroku opět dojdeme ke stejnému závěru.

Na Obr. 3.5 je zobrazeno Tingleyho schéma komplikovanějšího zubového vinutí s q = 3/8; zde si může každý ověřit jeho porovnání s vinutím q = 3 a krokem y_{1d} = 8.

```
' A     B   '
' C'    A'  '
'    C      '
'    B'     '
```

Obr. 3.4: Tingleyho schéma třífázového zubového vinutí s q = 1/2 a jedním pólpárem

```
' A                       B   '
' A                       A'  '
'                      B'     '
'                      B'     '
'                   B         '
'                   B         '
'                C            '
'                B'           '
'             C'              '
'             C'              '
'          C                  '
'          C                  '
'       A                     '
'       C'                    '
'    A'                       '
'    A'                       '
```

Obr. 3.5: Tingleyho schéma třífázového zubového vinutí s q = 3/8

Na třech příkladech tak bylo dokázáno, že výše uvedené vztahy platí obecně pro jakékoliv symetrické dvouvrstvé třífázové vinutí a rozhodujícím parametrem je činitel kroku vinutí β.

4 Vícefázová vinutí napájená harmonickým proudem

Nyní se dostáváme k nejdůležitější kapitole této výzkumné zprávy. Dříve odvozené vztahy pro třífázové vinutí budou zobecněny a použity pro obecně m-fázová vinutí.

Pro oblast otevření drážky a jednu dvojici drážek s jednou cívkovou stranou analyzované fáze platí obecný vztah (viz (3.1-2))

$$\lambda_p = \frac{h_{d0}}{4b_0} + \frac{h_{d0}}{4b_0}\cos(\alpha) + \frac{h_{d0}}{4b_0} + \frac{h_{d0}}{4b_0}\cos(\alpha) = \frac{h_{d0}}{2b_0}(1 + \cos(\alpha)) \qquad (3.3\text{-}1)$$

a obdobně pro oblast vinutí horizontálně dělené drážky dle (3.1-4)

$$\lambda_p = \frac{h'_{d3}}{3b_d} + \frac{h'_{d3}}{8b_d}\cos(\alpha) + \frac{h'_{d3}}{12b_d} + \frac{h'_{d3}}{8b_d}\cos(\alpha) = \frac{h'_{d3}}{12b_d}(5 + 3\cos(\alpha)) \qquad (3.3\text{-}2)$$

To jsou základní vztahy respektující dvě cívkové strany v drážce protékané proudy 1 a cos(α) p.u. Pro další výpočty je nutné zobecnit počty drážek s jednotlivými kombinacemi cívkových stran.

4.1 *Zobecnění používaných vztahů*

V Tab. 3 jsou shrnuty a zobecněny vztahy z Tab. 1 a Tab. 2, které byly platné pouze pro třífázová vinutí pro činitel *k* = 1 – 4. Pro vinutí s plným krokem platí, že počet drážek na pólovou rozteč příslušných dané fázi je obecně $\frac{1}{m}t_{pd}$.

Tab. 3 Zobecnění počtů drážek s jednotlivými kombinacemi cívkových stran *m*-fázového vinutí

	$\beta\epsilon\left(1-k\frac{1}{m};1-(k-1)\frac{1}{m}\right\rangle \cup \left(1+(k-1)\frac{1}{m};1+k\frac{1}{m}\right\rangle$			
	k = 1	*k* = 2	*k* = 3	*k* = 4
Minimální počet fází	2	2	3	4
$\lambda_f = \lambda_{p0}$	$t_{pd}\left(\beta-\frac{m-1}{m}\right)$	0	0	0
λ_{p1}	$t_{pd}\left(\frac{m-0}{m}-\beta\right)$	$t_{pd}\left(\beta-\frac{m-2}{m}\right)$	0	0
λ_{p2}	0	$t_{pd}\left(\frac{m-1}{m}-\beta\right)$	$t_{pd}\left(\beta-\frac{m-3}{m}\right)$	0
λ_{p3}	0	0	$t_{pd}\left(\frac{m-2}{m}-\beta\right)$	$t_{pd}\left(\beta-\frac{m-4}{m}\right)$
λ_{p4}	0	0	0	$t_{pd}\left(\frac{m-3}{m}-\beta\right)$

Na základě tabulky lze vytvořit obecný závěr, že pro *m*-fázové dvouvrstvé vinutí s činitelem zkrácení kroku $\beta\epsilon\left(1-k\frac{1}{m};1-(k-1)\frac{1}{m}\right\rangle$, kde *k* může nabývat hodnot 1, 2, …, *m*, se uplatní činitele $\lambda_{p(k-1)}$ a $\lambda_{p(k)}$ v počtu $t_{pd}\left(\beta-\frac{m-k}{m}\right)$ a $t_{pd}\left(\frac{m-(k-1)}{m}-\beta\right)$. Obecný činitel k_λ je pak vyjádřen jako

$$k_\lambda=\frac{t_{pd}\left(\beta-\frac{m-k}{m}\right)\lambda_{p(k-1)}+t_{pd}\left(\frac{m-(k-1)}{m}-\beta\right)\lambda_{p(k)}}{\frac{1}{m}t_{pd}\lambda_f}=$$
$$=m\left(\beta-\frac{m-k}{m}\right)\frac{\lambda_{p(k-1)}}{\lambda_f}+m\left(\frac{m-(k-1)}{m}-\beta\right)\frac{\lambda_{p(k)}}{\lambda_f} \qquad (4.1\text{-}1)$$
$$=(\beta m-m+k)\frac{\lambda_{p(k-1)}}{\lambda_f}+(m-k+1-\beta m)\frac{\lambda_{p(k)}}{\lambda_f}$$

Konkrétní hodnota pro jednotlivé oblasti drážky pak již závisí na počtu fází a činiteli k. Úhel α je pak dán počtem fází a činitelem k jako

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{m} \tag{4.1-2}$$

a pro oblast otevření drážky je činitel k_{ke} roven

$$\begin{aligned} k_{ke(m,k)} &= (\beta m - m + k)\frac{\frac{h_{d0}}{2b_0}(1+\cos(\alpha_{k-1}))}{\frac{h_{d0}}{b_{d0}}} + (m - k + 1 - \beta m)\frac{\frac{h_{d0}}{2b_0}(1+\cos(\alpha_k))}{\frac{h_{d0}}{b_{d0}}} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[(\beta m - m + k)\cos\left(\frac{(k-1)\pi}{m}\right) + (1 - k + m - \beta m)\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.1-3}$$

Výraz v hranaté závorce je možné dle [5], [6] nahradit činitelem k_r a vztah (4.1-3) přechází do tvaru

$$k_{ke(m,k)} = \frac{1 + k_{r(m,k)}}{2} \tag{4.1-4}$$

a pro oblast vinutí (a horizontálně dělenou drážku) je činitel k_{Cu} roven

$$\begin{aligned} k_{Cu(m,k)} &= (\beta m - m + k)\frac{\frac{h'_{d3}}{12b_d}(5+3\cos(\alpha_{k-1}))}{\frac{2h'_{d3}}{3b_d}} + (m - k + 1 - \beta m)\frac{\frac{h'_{d3}}{12b_d}(5+3\cos(\alpha_k))}{\frac{2h'_{d3}}{3b_d}} = \\ &= \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\left[(\beta m - m + k)\cos\left(\frac{(k-1)\pi}{m}\right) + (1 - k + m - \beta m)\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.1-5}$$

a substitucí za činitel k_r je vztah upraven do tvaru

$$k_{Cu(m,k)} = \frac{5 + 3k_r}{8} \tag{4.1-6}$$

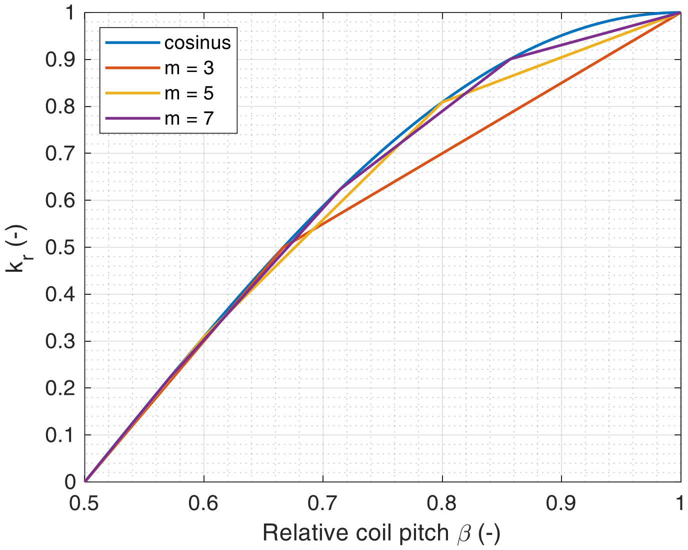
Pokud budeme zvyšovat počet fází vinutí teoreticky k nekonečnu $m \longrightarrow \infty$, činitel k se začne měnit spojitě dle funkce

$$k_{(m\to\infty)} = (1-\beta)m + 1 \tag{4.1-7}$$

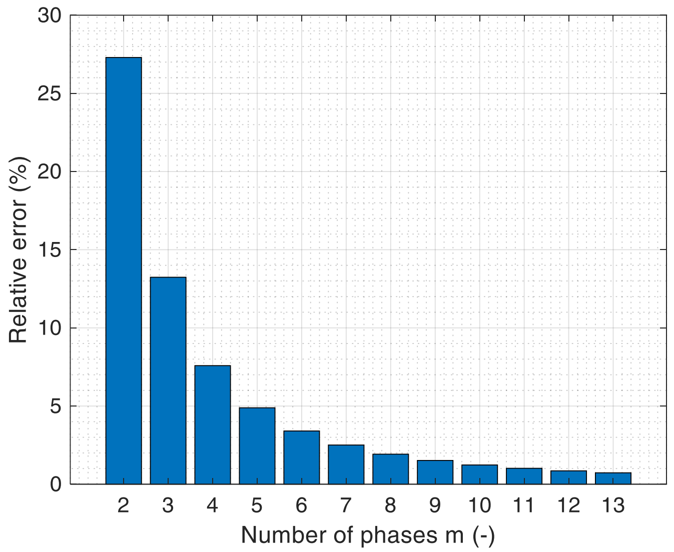
Dosazením tohoto vztahu do rovnice pro činitel k_r lze úpravou a použitím součtového vzorce goniometrické funkce kosinus získat vztah

$$\begin{aligned} k_{r(m\to\infty)} &= (\beta m - m + (1-\beta)m + 1)\cos\left(\frac{\big((1-\beta)m + 1 - 1\big)\pi}{m}\right) + \\ &+ (1 - (1-\beta)m - 1 + m - \beta m)\cos\left(\frac{\big((1-\beta)m + 1\big)\pi}{m}\right) = \\ &= \cos(1-\beta)\pi = \cos\pi\cdot\cos\beta\pi + \sin\pi\cdot\sin\beta\pi = -\cos\beta\pi \end{aligned} \tag{4.1-8}$$

Na Obr. 4.1 je zobrazen průběh činitele k_r pro 3, 5 a 7 fází a ideální funkce kosinus. Na Obr. 4.2 je zobrazena maximální relativní odchylka průběhu činitele k_r od kosinové funkce. Pro devítifázový stroj je maximální odchylka 1,5 %; tato přesnost je již dostatečná a pro stroje s devíti a více fázemi je tak možné používat idealizovaný vztah (4.1-8).



Obr. 4.1: Průběh činitele k_r pro vinutí se 3, 5 a 7 fázemi



Obr. 4.2: Maximální relativní odchylka od průběhu funkce kosinus

Pro praktické použití při návrhu stroje je důležité znát číselně hodnotu činitele k_r, ale hlavně k_{ke} a k_{Cu}. V Tab. 4 jsou shrnuty výpočty jednotlivých činitelů pro vinutí o různém počtu fází a činiteli zkrácení kroku. Tato tabulka je vhodná pro použití konkrétního návrhu jednoho stroje; při vytvoření obecného nástroje pro návrh vícefázových elektrických strojů je možné výpočet vhodně algoritmizovat. Algoritmus je založen na skutečnosti, že v mezních bodech činitele β leží lomená čára činitele k_r na funkci kosinus; nalezením intervalu činitele β a jeho mezních bodů je možné odvodit rovnici přímky na tomto intervalu a dopočítat činitele k_r, k_{ke} a k_{Cu}.

Tab. 4: Hodnoty činitelů k_{ke} a k_{Cu} pro všechna vinutí a uvažované zkrácení kroku

Počet fází *m*	*k*	Činitel zkrácení kroku β	k_r	k_{ke}	k_{Cu}
2	1	$\langle 0{,}5; 1{,}5\rangle$	$2\beta - 1$	β	$0{,}25(1+3\beta)$
3	1	$\left\langle \frac{2}{3}; \frac{4}{3} \right\rangle$	$0{,}5(3\beta - 1)$	$0{,}25(1+3\beta)$	$\frac{7}{16} + \frac{9}{16}\beta = 0{,}25(1+3k_{ke})$
	2	$\left\langle \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{4}{3}; \frac{5}{3} \right\rangle$	$1{,}5(2\beta - 1)$	$0{,}25(6\beta - 1)$	$\frac{1}{16} + \frac{9}{8}\beta = 0{,}25(1+3k_{ke})$
4	1	$\left\langle \frac{3}{4}; \frac{5}{4} \right\rangle$	$2\sqrt{2} - 3 + \left(4 - 2\sqrt{2}\right)\beta$	$\sqrt{2} - 1 + \left(2 - \sqrt{2}\right)\beta$	$\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\beta$
	2	$\left\langle \frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{4}; \frac{3}{2} \right\rangle$	$2\sqrt{2}\beta - \sqrt{2}$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\beta$	$\frac{5-3\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\beta$
5	1	$\left\langle \frac{4}{5}; \frac{6}{5} \right\rangle$	$0{,}045 + 0{,}955\beta$	$0{,}523 + 0{,}477\beta$	$0{,}642 + 0{,}358\beta$
	2	$\left\langle \frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right\rangle \cup \left\langle \frac{6}{5}; \frac{7}{5} \right\rangle$	$-1{,}191 + 2{,}5\beta$	$-0{,}095 + 1{,}25\beta$	$0{,}178 + \frac{15}{16}\beta$
	3	$\left\langle \frac{2}{5}; \frac{3}{5} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{5}; \frac{8}{5} \right\rangle$	$-1{,}545 + 3{,}090\beta$	$-0{,}273 + 1{,}545\beta$	$0{,}047 + 1{,}159\beta$
6	1	$\left\langle \frac{5}{6}; \frac{7}{6} \right\rangle$	$3\sqrt{3} - 5 + \left(6 - 3\sqrt{3}\right)\beta$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2 + \left(3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\beta$	$\frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{5}{4} + \left(\frac{9}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)\beta$
	2	$\left\langle \frac{4}{6}; \frac{5}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{6}; \frac{8}{6} \right\rangle$	$2{,}5 - 2\sqrt{3} + \left(3\sqrt{3} - 3\right)\beta$	$1{,}75 - \sqrt{3} + \frac{3}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)\beta$	$\frac{25}{16} - \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{8}\left(\sqrt{3} - 1\right)\beta$
	3	$\left\langle \frac{3}{6}; \frac{4}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{8}{6}; \frac{9}{6} \right\rangle$	$-1{,}5 + 3\beta$	$-0{,}25 + 1{,}5\beta$	$\frac{1}{16} + \frac{9}{8}\beta$
7	1	$\left\langle \frac{6}{7}; \frac{8}{7} \right\rangle$	$0{,}307 + 0{,}693\beta$	$0{,}653 + 0{,}347\beta$	$0{,}74 + 0{,}26\beta$
	2	$\left\langle \frac{5}{7}; \frac{6}{7} \right\rangle \cup \left\langle \frac{8}{7}; \frac{9}{7} \right\rangle$	$-0{,}764 + 1{,}942\beta$	$0{,}118 + 0{,}971\beta$	$0{,}339 + 0{,}728\beta$
	3	$\left\langle \frac{4}{7}; \frac{5}{7} \right\rangle \cup \left\langle \frac{9}{7}; \frac{10}{7} \right\rangle$	$-1{,}381 + 2{,}807\beta$	$-0{,}191 + 1{,}403\beta$	$0{,}107 + 1{,}053\beta$
	4	$\left\langle \frac{3}{7}; \frac{4}{7} \right\rangle \cup \left\langle \frac{10}{7}; \frac{11}{7} \right\rangle$	$-1{,}558 + 3{,}115\beta$	$-0{,}279 + 1{,}558\beta$	$0{,}041 + 1{,}168\beta$

8	1	$\left\langle \frac{7}{8};\frac{9}{8} \right\rangle$	$0{,}391 + 0{,}609\beta$	$0{,}696 + 0{,}305\beta$	$0{,}772 + 0{,}228\beta$
	2	$\left\langle \frac{6}{8};\frac{7}{8} \right\rangle \cup \left\langle \frac{9}{8};\frac{10}{8} \right\rangle$	$-0{,}594 + 1{,}734\beta$	$0{,}203 + 0{,}867\beta$	$0{,}402 + 0{,}650\beta$
	3	$\left\langle \frac{5}{8};\frac{6}{8} \right\rangle \cup \left\langle \frac{10}{8};\frac{11}{8} \right\rangle$	$-1{,}239 + 2{,}595\beta$	$-0{,}120 + 1{,}298\beta$	$0{,}160 + 0{,}973\beta$
	4	$\left\langle \frac{4}{8};\frac{5}{8} \right\rangle \cup \left\langle \frac{11}{8};\frac{12}{8} \right\rangle$	$-1{,}531 + 3{,}062\beta$	$-0{,}265 + 1{,}531\beta$	$0{,}051 + 1{,}148\beta$
9 a více	-	$\langle 0;2 \rangle$	$-\cos\beta\pi$	$0{,}5(1-\cos\beta\pi)$	$\frac{1}{8}(5-3\cos\beta\pi)$

5 Vliv vyšších časových harmonických ve vícefázových vinutích

V proudu vinutí se často objevují vyšší parazitické harmonické způsobené např. drážkováním, nebo sycením magnetického obvodu. Ve vícefázových strojích je přítomnost vyšších harmonických často žádoucí; injektáž vyšších harmonických ve vinutích s lichým počtem fází přináší výhody jako lepší využitelnost dostupného napětí nebo zvýšení momentu stroje.

Injektáž vyšších harmonických do napětí stroje způsobuje různý fázový posun různých harmonických proudu a jeho průběh je jen těžké odhadnout. Proto se v rámci této zprávy zaměříme na injektáž vyšších harmonických přímo do proudu, která se používá zejména pro zvýšení momentu stroje s permanentními magnety.

V [7] bylo ověřeno, že nejvyšší nárůst momentu nastává, pokud jsou sinusové průběhy proudu základní a třetí harmonické ve fázi a průběh proudu je zploštělý; to je způsobeno především předpokladem zploštělého průběhu magnetické indukce vybuzené rotorovými permanentními magnety.

Pro získání průběhu proudu co nejvíce blízkého lichoběžníkovému lze odvodit poměry mezi jednotlivými harmonickými [8] za dodržení podmínky stejné amplitudy 1 p.u. Ty jsou shrnuty v Tab. 5.

Tab. 5: Velikosti jednotlivých harmonických při injektáži vyšších harmonických pro dosažení přibližně lichoběžníkového průběhu proudu

Kombinace harmonických	I_1 (p.u.)	I_3 (p.u.)	I_5 (p.u.)	I_7 (p.u.)
1.	1	0	0	0
1. + 3.	1,1547	0,1933	0	0
1. + 3. + 5.	1,2072	0,2785	0,0714	0
1. + 3. + 5. + 7.	1,2311	0,3275	0,1255	0,0369

Přejdeme tedy k sinovému popisu funkce průběhu proudu, která bude mít tvar

$$i(\xi) = \sum_{\mu=1,3,5,\dots} I_\mu \sin \mu\xi \tag{4.1-1}$$

Jako referenční je opět zvolena úhlová pozice, kdy je základní harmonická dané fáze v amplitudě; tentokrát ξ = π/2.

Fázový posun proudů dalších fázových svazků oproti vyšetřované fázi je stále

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{m} \tag{4.1-2}$$

a pro zvolenou úhlovou pozici bude proud jednotlivými fázovými svazky roven

$$i_k = \sum_{\mu=1,3,5,\dots} I_\mu \sin \mu \left(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{m}\right) \tag{4.1-3}$$

Činitel k určuje vzdálenost daného fázového svazku od svazku aktuálně vyšetřované fáze, jejíž proud je v amplitudě.

Po vzoru vztahů (3.3-1) a (3.3-2) lze pro oblast otevření drážky definovat upravený vztah

$$\lambda_p = \frac{h_{d0}}{2b_0}(1 + i_k) \tag{4.1-4}$$

a obdobně pro oblast vinutí horizontálně dělené drážky

$$\lambda_p = \frac{h'_{d3}}{12b_d}(5 + 3i_k) \tag{4.1-5}$$

Dosazením do obecného činitele k_λ (4.1-1) a úpravou je činitel k_{ke} roven

$$k_{ke(m,k)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[(\beta m - m + k)i_{k-1} + (1 - k + m - \beta m)i_k] \tag{4.1-6}$$

a obdobně činitel k_{Cu}

$$k_{Cu(m,k)} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}[(\beta m - m + k)i_{k-1} + (1 - k + m - \beta m)i_k] \tag{4.1-7}$$

Opět lze z obou rovnic vytknout činitel k_r, který má tvar

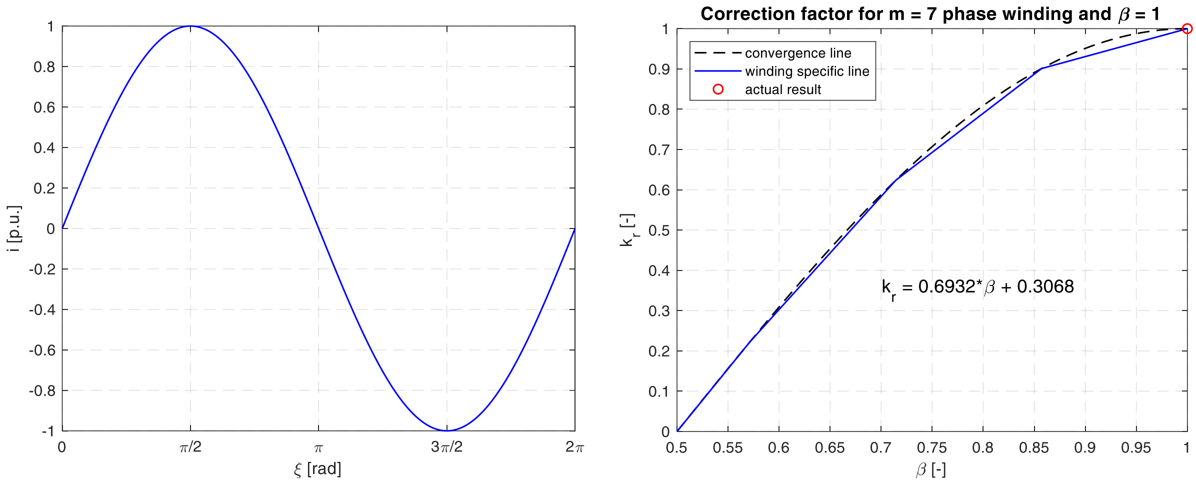
$$k_r = (\beta m - m + k)i_{k-1} + (1 - k + m - \beta m)i_k \tag{4.1-8}$$

Pokud budeme zvyšovat počet fází vinutí teoreticky k nekonečnu $m \to \infty$, činitel k se začne měnit spojitě dle vztahu (4.1-7) a činitel k_r lze upravit do tvaru

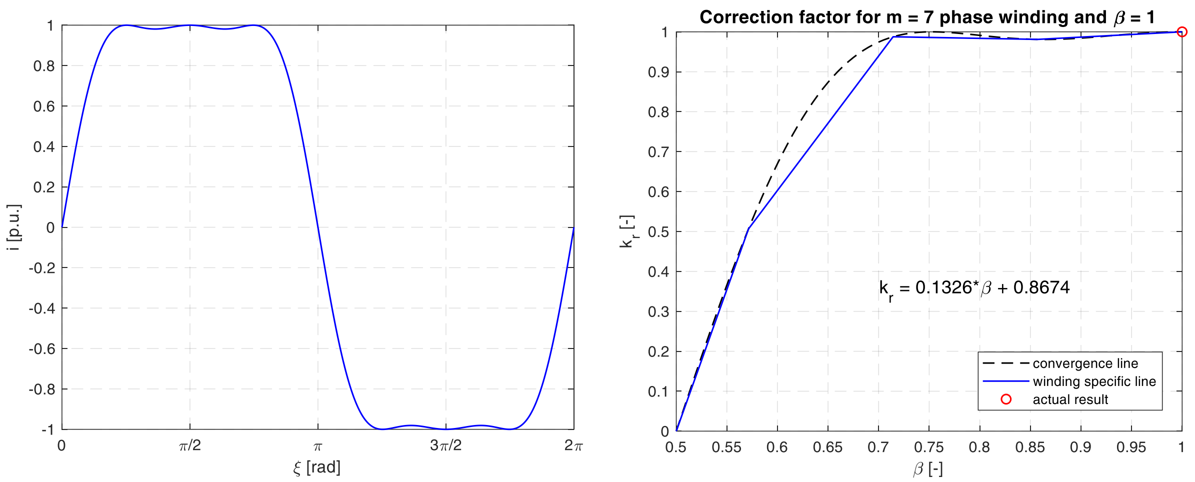
$$\begin{aligned} k_{r(m\to\infty)} &= (\beta m - m + (1-\beta)m + 1) \sum_{\mu=1,3,5,\dots} I_\mu \sin \mu \left(\frac{\pi}{2} + \frac{(1-\beta)m\pi}{m}\right) + \\ &+ (1 - (1-\beta)m - 1 + m - \beta m) \sum_{\mu=1,3,5,\dots} I_\mu \sin \mu \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\big((1-\beta)m + 1\big)\pi}{m}\right) = \\ &\sum_{\mu=1,3,5,\dots} I_\mu \sin \mu \left(\frac{3}{2} - \beta\right)\pi \end{aligned} \tag{4.1-9}$$

Výpočet byl proveden za předpokladu, že v bodě ξ = π/2 má průběh proudu svoje maximum. To však nemusí obecně platit, a pokud je pro injektáž použit lichý počet vyšších harmonických, nachází se naopak v tomto bodě lokální minimum. V takových případech přestává být odvozený postup platný.

Pro grafické zobrazení výsledků je zvolena injektáž 3. a 5. harmonické dle Tab. 5. Na Obr. 5.1 a Obr. 5.2 je zobrazeno porovnání činitele k_r pro sedmifázové vinutí protékané harmonickým proudem a pro vinutí s injektáží těchto harmonických složek. V obrázcích je vyznačen bod znamenající vinutí s plným krokem a rovnice činitele k_r pro tuto oblast.



Obr. 5.1: Průběh harmonického proudu a činitele k_r sedmifázového vinutí



Obr. 5.2: Průběh proudu s injektovanou 3. a 5. harmonickou a činitele k_r sedmifázového vinutí

Idealizovaný průběh činitele k_r přímo odpovídá tvaru vlny proudu a lze ho použít i pro zápornou injektáž vyšších harmonických v důsledku zploštěného průběhu napětí.

6 Závěr

Práce je zaměřena na vliv kroku vinutí na drážkový rozptyl stroje, respektovaného činiteli k_{ke} a k_{Cu}. Tyto činitele byly odvozeny před desítkami let pro třívrstvé vinutí a v neměnném stavu jsou používány dodnes. V této zprávě je zopakováno odvození těchto vztahů pomocí přístupů založených na výpočtu energie magnetického pole, spřažených toků a vlastních a vzájemných indukčností. Tím je zejména prezentována použitelnost a vhodnost jednotlivých přístupů a metod.

Pro třífázové vinutí a činitel zkrácení kroku v rozsahu $\beta\epsilon\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right\rangle$ platí pro horizontálně dělenou drážku (spodní a horní cívkové strany) vztahy

$$\begin{aligned} k_{ke} &= 0.25(1+3\beta) \\ k_{Cu} &= 0.25(1+3k_{ke}) \end{aligned} \tag{4.1-1}$$

Ačkoliv byly v této oblasti uvažování pouze oblasti vinutí, mezivrstvy a otevření drážky, činitel k_{ke} je nutné použít na všechny oblasti drážky nacházející se nad vinutím (oblast drážkového klínu apod.). Definice činitele drážkové vodivosti pro tyto oblasti a tvary drážek je možné najít např. v [1], [3], [4] a jejich srovnání je shrnuto v [9]. V dizertační práci [2] bylo zároveň dokázáno, že pro prakticky používané rozměry **drážek jiných tvarů je možné použít tyto vztahy odvozené pro obdélníkovou drážku a odchylka není větší než 2,5 %**.

Výsledný zápis činitele magnetické vodivosti lichoběžníkové drážky dle [4] by pak vypadal takto:

$$\lambda_d = k_{Cu}\frac{h_3}{3b_1} + k_{ke}\left(\frac{h_4-h_3}{b_1} + \frac{h_1}{b_1-b_0}\ln\frac{b_1}{b_0} + \frac{h_0}{b_0}\right) \tag{4.1-2}$$

Je zde zanedbaná mezivrstva „4“, ale jsou navíc přidány oblasti izolace pod klínem (h_4-h_3) a drážkového klínu „1“.

Pokud je použita vertikálně dělená drážka (typicky pro zubová dvouvrstvá vinutí), přechází činitel k_{Cu} do tvaru

$$k_{Cu} = k_{ke} = 0.25(1+3\beta) \tag{4.1-3}$$

Rovnost činitelů k_{ke} a k_{Cu} platí obecně pro vertikálně dělené drážky vinutí s libovolným počtem fází. Zároveň nemá na tyto činitele vliv druh vinutí (zubové, zlomkové), ale pouze činitel zkrácení kroku β.

Proměnná složka činitelů k_{ke} a k_{Cu} při zkracování kroku vinutí je dána vzájemnými indukčnostmi mezi oběma vrstvami vinutí a lze ji dle [5] shrnout pod společný činitel k_r. Ten má pro obecné m-fázové vinutí tvar

$$k_r = (\beta m - m + k)\cos\left(\frac{(k-1)\pi}{m}\right) + (1-k+m-\beta m)\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right) \tag{4.1-4}$$

Činitel k udává dle (2.5-2) pozici, v jakém pásmu vzhledem k počtu fází se činitel zkrácení kroku β nachází. Je dokázáno, že pro rostoucí počet fází konverguje činitel k_r k funkci (viz (4.1-8))

$$k_{r(m\to\infty)} = -\cos\beta\pi \qquad (4.1\text{-}5)$$

Činitele k_{ke} a k_{Cu} lze pak z k_r získat dle (4.1-4) a (4.1-6). Hodnoty všech tří koeficientů pro různý počet fází a krok vinutí **jsou shrnuty v Tab. 4**.

Poslední kapitola je věnována injektáži vyšších časových harmonických složek (lichých) do proudu vinutím *m*-fázového vinutí (*m*-liché). Pokud je zajištěno, že amplituda průběhu proudu je ve stejném bodě, jako při napájení pouze první harmonickou, přechází činitel k_r do obecného tvaru

$$k_r = (\beta m - m + k)i_{k-1} + (1 - k + m - \beta m)i_k\ , \qquad (4.1\text{-}6)$$

kde

$$i_k = \sum_{\mu=1,3,5,\ldots} I_\mu \sin\mu\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{m}\right) \qquad (4.1\text{-}7)$$

Pro rostoucí počet fází konverguje činitel k_r k funkci (viz (4.1-8))

$$k_{r(m\to\infty)} = \sum_{\mu=1,3,5,\ldots} I_\mu \sin\mu\left(\frac{3}{2} - \beta\right)\pi \qquad (4.1\text{-}8)$$

Tyto tvary jsou zobecněním rovnic (4.1-3) a (4.1-4).

V této zprávě je shrnut a popsán vliv počtu fází na činitele popisující vztah mezi zkrácením kroku vinutí a drážkovým rozptylem včetně jejich matematického odvození. V Tab. 4 jsou shrnuty výsledky, které může čtenář přímo aplikovat při návrhu stroje.

Vliv zkrácení kroku u vinutí s větším počtem fází se potlačuje a případná injektáž vyšších harmonických může tento jen ještě více omezit.

Literatura

[1] RIGGERT, Johann Heinrich, VASKE, Paul. Elektrische Maschinen und Umformer, Teil 2: Berechnung elektrischer Maschinen, 7th ed., Stuttgart, Germany, 1967.

[2] LAKSAR, Jan. Metody pro analýzu vlastností speciálních typů vinutí elektrických strojů točivých. Dizertační práce, ZČU Plzeň, 2019.

[3] KOPYLOV, Igor Petrovič. *Stavba elektrických strojů*. 1. vyd. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1988. ISBN 04-532-88.

[4] PYRHÖNEN, Juha, JOKINEN, Tapani, HRABOVCOVÁ, Valéria. *Design of Rotating Electrical Machines*. 2. vyd. John Wiley & Sons Ltd, 2014. ISBN 978-1-118-58157-5.

[5] LIWSCHITZ-GARIK, Michael, WHIPPLE, Clyde C. *Electric Machinery Vol II: AC Machines*. D. Van nostrand Company, Inc, 1946.

[6] CORDOVIL , P, CHABU, I. E.,*Analytical calculation of slot leakage inductance in multiphase electrical machines*. 2016 XXII International Conference on Electrical Machines (ICEM), Lausanne, 2016 s. 1352-1358. doi: 10.1109/ICELMACH.2016.7732700.

[7] SUI , Yi, ZHENG, Ping, FAN , Yuhui, ZHAO, Jie. *Research on the vector control strategy of five-phase permanent-magnet synchronous machine based on third-harmonic current injection*. 2017 IEEE International Electric Machines and Drives Conference (IEMDC), Miami, 2017, s. 1-8, doi: 10.1109/IEMDC.2017.8002355.

[8] KALAJ, Patrik a kol. *Measurement of the Effects of Higher Harmonic Injection on Nine-phase Induction Motor.* IECON 2020 The 46th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, Singapore, 2020, s. 4851-4856, doi: 10.1109/IECON43393.2020.9254511.

[9] LAKSAR, Jan. Improved calculation of the slot leakage inductance of different slot shapes. *Electr Eng*, 2020. DOI: 10.1007/s00202-019-00910-w

Seznam obrázků

Historie revizí

Rev.	Kapitola	Popis změny	Datum	Jméno
0	Všechny	Publikování dokumentu	9.7.2021	Laksar